DIE EIGENSCHAFTEN DER ORDNUNGSKURVEN EINER BELIEBIGEN RECIPROCITÄT IN DER EBENE.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT
HALLE-WITTENBERG

VORGELEGT VON

HANS HOFF
AUS HANNOVER.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

HALLE a. S.
HOFBUCHDRUCKEREI VON C. A. KAEMMERER & CO.
1906.

Meinen lieben Eltern!

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546024_0160

Stehen die Punkte und Geraden zweier Ebenen zu einander in einer solchen Beziehung, dass jedem Punkte der einen eine und nur eine Gerade der anderen zugeordnet ist, und umgekehrt, spezieller, dass jeder geraden Punktreihe der einen ein projektivisches Strahlbüschel der anderen eindeutig entspricht, und umgekehrt, so sind die beiden Ebenen zu einander reciprok, und diese Verwandtschaft nennt man Reciprocität. Lässt man die beiden reciproken Ebenen auf einander fallen, so sind jedem Punkte zwei Gerade, jeder Geraden zwei Punkte zugeordnet, da man ja Punkt wie Gerade als zur einen wie zur anderen Ebene gehörig betrachten kann. Sucht man nun die geometrischen Orte für alle die Elemente, die auf ihren zugeordneten Elementen selbst liegen, so erhält man zwei Kurven, die Ordnungskurven der Reciprocität, um deren Eigenschaften es sich in den folgenden Untersuchungen handelt. In der mathematischen Litteratur findet sich eine Reihe von Angaben über diese Ordnungskurven, die ich in Kürze hier anführen will. Die beiden Kurven stehen im allgemeinen in doppelter Berührung, wofür der Beweis meistens geometrisch geführt ist, nur im Salmon-Fiedler ist neuerdings auch ein analytischer Beweis gegeben worden, indem die beiden Kurven als ein Büschel sich doppelt berührender Kegelschnitte betrachtet werden. Auch die Zahl der Doppelelemente ist in analytischer Form durch Fiedler abgeleitet, auch sind einige Folgerungen daraus gezogen. Ich habe im Anschluss an die Grassmann'sche Ausdehnungslehre die Untersuchungen von vorn begonnen und auch die schon bekannten Eigenschaften in dieser anderen Darstellungs- und Bezeichnungsweise abgeleitet. Die ganzen Untersuchungen sind in analytischer Form geführt, wodurch ich auch ver-

schiedene Beziehungen zwischen den analytischen Ausdrücken der Reciprocität erhielt, deren Betrachtung natürlich eine notwendige Grundlage bilden musste. Dann aber suchte ich die Kenntnisse der Eigenschaften der Ordnungskurven dadurch zu erweitern, dass ich die schon von Plücker angedeuteten Konstruktionen durchführte und bewies, woran sich verschiedene Fragen anschlossen, dass ich ferner die doppelt konjugierten Elemente wie auch die Bedingungen für das Ausarten der beiden Ordnungskurven einer genaueren Betrachtung unterzog, worüber ich in der Litteratur nur sehr dürftige, bez. gar keine Angaben gefunden habe. Auf sich ergebende Besonderheiten oder Ausnahmen ist an den betreffenden Stellen hingewiesen worden; es kommen hierbei hauptsächlich die bekannte Polarreciprocität als Spezialfall der vorliegenden allgemeinen Untersuchungen und das Nullsystem in Betracht, bei dem dann die drei Grundstäbe durch einen und denselben Punkt gehen, die drei Grundpunkte andererseits auf einer und derselben Geraden liegen.

Auf die Eigenschaften der sich doppelt berührenden Kegelschnitte bin ich nur so weit eingegangen, als es für die reciproken Beziehungen erforderlich ist; die sonstigen, vielfach untersuchten Eigenschaften derartig gelegener Kegelschnitte habe ich unberücksichtigt gelassen.

Abschnitt I.

Die extensiven Brüche der Reciprocität und die Bedeutung ihrer Grössen.

Man kann die Verwandtschaft der Reciprocität darstellen durch einen Bruch, bei dem man im Zähler 3 Stäbe, im Nenner 3 vielfache Punkte hat. Die 3 vielfachen Punkte seien e_1, e_2, e_3, und es bestehe zwischen ihnen die Gleichung

(1) $$[e_1\, e_2\, e_3] = 1.$$

Dann sind e_1, e_2, e_3 die Ecken des Fundamentaldreiecks. Ferner wird der seiner Lage nach beliebig gewählte Punkt e, der nicht mit 2 Grundpunkten in derselben Geraden liegen soll, der Einheitspunkt, d. h. es besteht die Gleichung

$$e = e_1 + e_2 + e_3. \tag{2}$$

Nun lässt sich auch jeder beliebige Punkt x der Ebene als Vielfachensumme der 3 Grundpunkte e_1, e_2, e_3 darstellen, d. h. er hat die Form

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3, \tag{3}$$

wobei seine Ableitzahlen die auf das Dreieck e_1, e_2, e_3 als Fundamentaldreieck bezogenen Dreieckskoordinaten des Punktes x sind.

Bezeichnet man andererseits die 3 Grundstäbe des Fundamentaldreiecks mit E_1, E_2, E_3, so kann man jeden beliebigen Stab U der Ebene als Vielfachensumme der 3 Grundstäbe E_1, E_2, E_3 darstellen, d. h. er hat die Form

$$U = u_1 E_1 + u_2 E_2 + u_3 E_3, \tag{4}$$

wobei seine Ableitzahlen die auf das Dreieck e_1, e_2, e_3 als Fundamentaldreieck bezogenen Dreieckskoordinaten des Stabes U sind.

Seien nun A_1, A_2, A_3 die 3 Stäbe des Zählers, in welche die Eckpunkte des Fundamentaldreiecks durch die Reciprocität übergehen, so erhält man als analytischen Ausdruck der Punkt-Stababbildung einer beliebigen Reciprocität den extensiven Bruch

$$r = \frac{A_1\ A_2\ A_3}{e_1\ e_2\ e_3}, \tag{5}$$

durch den nach der Bedeutung des extensiven Bruches den 3 Nennern e_1, e_2, e_3 die 3 Zähler A_1, A_2, A_3 zugewiesen werden, d. h. es wird

$$e_i\, r = A_i \text{ wo } i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Die Zähler A_1, A_2, A_3 sind also Stäbe, die aus den Einheiten 2. Stufe

$$(7) \qquad E_1 = [e_2\, e_3] \qquad E_2 = [e_3\, e_1] \qquad E_3 = [e_1\, e_2],$$

welche ich oben schon als Grundstäbe bezeichnet habe, numerisch abgeleitet sind mit den Ableitzahlen a_{ik} durch die Gleichungen

$$(8) \qquad \begin{cases} A_1 = a_{11}\, E_1 + a_{12}\, E_2 + a_{13}\, E_3 \\ A_2 = a_{21}\, E_1 + a_{22}\, E_2 + a_{23}\, E_3 \\ A_3 = a_{31}\, E_1 + a_{32}\, E_2 + a_{33}\, E_3. \end{cases}$$

Da die durch (7) definierten Stäbe E_1, E_2, E_3 die Grundstäbe des Fundamentaldreiecks sind, so besteht zwischen ihnen noch die Gleichung

$$(9) \qquad [E_1\, E_2\, E_3] = 1.$$

Ich führe jetzt den zu r adjungierten Bruch R ein, dessen Zähler aus 3 Punkten und dessen Nenner aus 3 Stäben besteht. Dann wird durch den Bruch R jedem der 3 Nenner der entsprechende Zähler zugewiesen, d. h. R muss die Form haben

$$(10) \qquad R = \frac{a_1\, a_2\, a_3}{E_1\, E_2\, E_3},$$

woraus die Gleichung folgt

$$(11) \qquad E_i R = a_i, \text{ wo } i = 1, 2, 3.$$

Hierin sind a_1, a_2, a_3 also die Punkte, in die die Seiten des Fundamentaldreiecks durch die Reciprocität R übergehen.

Wie ich r als den analytischen Ausdruck der Punkt-Stababbildung bezeichnet habe, so ist R der analytische Ausdruck für die Stab-Punktabbildung einer beliebigen Reciprocität.

In (10) bedeuten die Nenner die durch (7) definierten Stäbe, und die Zähler a_1, a_2, a_3 sind die 3 Schnittpunkte

der 3 Stäbe A_1, A_2, A_3, die schon in (5) vorkamen. Also bestehen zwischen diesen noch die Gleichungen

$$(12) \qquad a_1 = [A_2\, A_3] \qquad a_2 = [A_3\, A_1] \qquad a_3 = [A_1\, A_2].$$

Die 3 Stäbe A_i müssen sich in 3 Punkten schneiden, denn ich setze ein reelles, aus den 3 Stäben E_i bestehendes Fundamentaldreieck voraus. Wenn ich nun in (12) die Werte aus (8) einsetze und ausmultipliziere und dann noch die Beziehung (13) beachte, die aus (7) folgt, nämlich

$$(13) \qquad [E_2\, E_3] = e_1 \qquad [E_3\, E_1] = e_2 \qquad [E_1\, E_2] = e_3,$$

so ergibt sich, wenn ich noch mit $\mathfrak{A}_{ik}$ die Unterdeterminanten der Determinante $\alpha = [\alpha_{ik}]$ bezeichne, für die Punkte a_1, a_2, a_3 die numerische Ableitung

$$(14) \qquad \begin{cases} a_1 = \mathfrak{A}_{11}\, e_1 + \mathfrak{A}_{12}\, e_2 + \mathfrak{A}_{13}\, e_3 \\ a_2 = \mathfrak{A}_{21}\, e_1 + \mathfrak{A}_{22}\, e_2 + \mathfrak{A}_{23}\, e_3 \\ a_3 = \mathfrak{A}_{31}\, e_1 + \mathfrak{A}_{32}\, e_2 + \mathfrak{A}_{33}\, e_3. \end{cases}$$

Löse ich nun (8) und (14) nach E_i und e_i, wo $i = 1, 2, 3$ ist, auf, so erhalte ich

$$(15) \qquad \begin{cases} \alpha\, E_1 = \mathfrak{A}_{11}\, A_1 + \mathfrak{A}_{21}\, A_2 + \mathfrak{A}_{31}\, A_3 \\ \alpha\, E_2 = \mathfrak{A}_{12}\, A_1 + \mathfrak{A}_{22}\, A_2 + \mathfrak{A}_{32}\, A_3 \\ \alpha\, E_3 = \mathfrak{A}_{13}\, A_1 + \mathfrak{A}_{23}\, A_2 + \mathfrak{A}_{33}\, A_3 \end{cases}$$

nnd

$$(16) \qquad \begin{cases} \alpha\, e_1 = \alpha_{11}\, a_1 + \alpha_{21}\, a_2 + \alpha_{31}\, a_3 \\ \alpha\, e_2 = \alpha_{12}\, a_1 + \alpha_{22}\, a_2 + \alpha_{32}\, a_3 \\ \alpha\, e_3 = \alpha_{13}\, a_1 + \alpha_{23}\, a_2 + \alpha_{33}\, a_3. \end{cases}$$

Unter α sei immer die Determinante α_{ik} verstanden. In (15) und (16) sind die Ableitzahlen gegen die in (8) und (14) transponiert. Nun führe ich noch die extensiven Brüche für die inverse Abbildung zu r und R ein. Diese nehmen dann die Form an

(17) $$\frac{1}{r} = \frac{e_1 e_2 e_3}{A_1 A_2 A_3}$$

und

(18) $$\frac{1}{R} = \frac{E_1 E_2 E_3}{a_1 a_2 a_3},$$

woraus die Gleichungen folgen

(19) $$A_i \frac{1}{r} = e_i, \text{ wo } i = 1, 2, 3$$

und

(20) $$a_i \frac{1}{R} = E_i, \text{ wo } i = 1, 2, 3,$$

weil die Brüche (17) und (18) auch extensiv sein sollen. Die Bedeutung der einzelnen Grössen ist dieselbe wie bisher.

Läge nun der spezielle Fall des Polarsystems r, R vor, so müsste zunächst zwischen den Ableitzahlen α_{ik} die Beziehung obwalten

(21) $$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$$

und ferner zwischen r und R

(22) $$r = \frac{\alpha}{R},$$

wodurch die Polarreciprocität als eine involutorische Abbildung charakterisiert und die Indentität von Pol- und Polarkurve bedingt ist, d. h. also, dass in diesem Falle Pol- und Polarkurve zusammenfallen.

Schliesse ich aber den speziellen Fall des Polarsystems von der Betrachtung aus, lasse also nicht die Beziehung (21), sondern

(23) $$\alpha_{ik} \neq \alpha_{ki}$$

gelten, so will ich also voraussetzen, dass wenigstens für einen Index α_{ik} von α_{ki} verschieden sein soll.

Abschnitt II.

Definition von Pol- und Polarkurve.

Es muss zuerst untersucht werden, ob es in der beliebigen Reciprocität ein Gebilde gibt, das der Pol- oder Polarkurve der Polarreciprocität entspricht. Um diese Untersuchung zu erledigen, frage ich genau wie beim Polarsystem nach solchen Punkten x, die auf ihren zugeordneten Kurven xr liegen, d. h. ich erhalte die Gleichung

$$[x \cdot xr] = 0. \tag{1}$$

Dies ist eine Gleichung 2. Grades in x, weshalb alle Punkte x, die der angegebenen Bedingung genügen, auf einer Kurve 2. Ordnung liegen, welche ich als Polkurve der beliebigen Reciprocität bezeichnen will.

Ein Ausnahmefall aber liegt dann vor, wenn (1) durch jeden Wert von x erfüllt wird; es würde dies dem sogenannten Nullsystem im Raume entsprechen. — Dass überhaupt eine solche Ausnahme eintreten kann, ist aus dem Folgenden leicht zu erkennen. Der extensive Bruch r könnte ja den Wert haben

$$r = \frac{[e_1\, d]}{e_1}\,\frac{[e_2\, d]}{e_2}\,\frac{[e_3\, d]}{e_3}, \tag{2}$$

wo d ein ganz beliebiger Punkt der Ebene ist. Im vorigen Abschnitt hatte ich gefunden

$$x = \mathfrak{x}_1\, e_1 + \mathfrak{x}_2\, e_2 + \mathfrak{x}_3\, e_3. \tag{3}$$

Multipliziere ich jetzt (3) mit r und berücksichtige (2), so ergibt sich

$$[xr] = [(\mathfrak{x}_1\, e_1 + \mathfrak{x}_2\, e_2 + \mathfrak{x}_3\, e_3)\, d], \tag{4}$$

und also nach (3)

$$[xr] = [xd]. \tag{5}$$

Durch Vormultiplikation mit x ist dann auch

(6) $$[\dot{x} \cdot xr] = [x \cdot xd],$$

oder nach (1)

(7) $$[x \cdot xd] = 0.$$

Da nun aber der Punkt d ein ganz beliebiger Punkt der Ebene war, so ist auch die Kurve xd, das ist aber eine Gerade, ganz beliebig; also ist der Punkt x, der ja auf jeder beliebigen in der Ebene durch x gezogenen Geraden liegt, jeder von diesen Geraden zugeordnet. Dasselbe kann man für jeden anderen Punkt x der Ebene beweisen, d. h. aber, dass alle Punkte der Ebene auf der gesuchten Kurve liegen, oder dass (1) für jeden beliebigen Wert von x erfüllt ist. — Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass dieser Ausnahmefall im Widerspruch steht zu unseren Voraussetzungen. Damit ein solcher Ausnahmefall überhaupt eintreten konnte, musste der extensive Bruch r die Form (2) haben, woraus folgt, dass die Eckpunkte e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks durch die Reciprocität r übergeführt werden in die 3 Stäbe $[e_1\, d]$, $[e_2\, d]$, $[e_3\, d]$, welche, wie man sofort erkennt, sich in dem einen Punkte d schneiden, während doch vorausgesetzt war, dass unter der Annahme eines reellen Fundamentaldreiecks die 3 diesen Eckpunkten durch die Reciprocität zugeordneten Stäbe sich in 3 von einander verschiedenen Punkten schneiden sollten. Ich bin also dadurch, dass ich dem Reciprocitätsbruch r den Wert (2) gab, auf einen Widerspruch mit den gemachten Voraussetzungen gestossen und schliesse daraus, dass im allgemeinen r den Wert (2) nicht haben kann, und dass also auch im allgemeinen nicht der Fall eintreten kann, dass (1) durch jeden Wert von x erfüllt wird. Man kann diesen möglichen Ausnahmefall von vornherein dadurch ausschalten, dass man noch die Bedingung einführt

(8) $$[A_1 A_2 A_3] = 1;$$

doch will ich diese Voraussetzung allgemein nicht machen.

Satz 1. „In jeder beliebigen Reciprocität r, R erfüllen alle Punkte, die auf ihren zugeordneten Kurven liegen, eine Kurve 2. Ordnung, welche man die Polkurve der beliebigen Reciprocität nennt. Ihre Gleichung lautet

(1) $$[x \cdot xr] = 0.“$$

Andererseits frage ich jetzt nach den Kurven U, die durch ihren zugeordneten Punkt UR gehen, und erhalte die Gleichung

(9) $$[U \cdot UR] = 0.$$

Dies ist eine Gleichung 2. Grades, weshalb alle Kurven U, die der angegebenen Bedingung genügen, eine Kurve 2. Klasse umhüllen, welche man als Polarkurve der beliebigen Reciprocität bezeichnet. Auch hier könnte wieder der Ausnahmefall eintreten, dass die durch (9) dargestellte Kurve für alle Werte U erfüllt wird. Durch eine analoge Untersuchung wie bei der Polkurve lässt sich aber zeigen, dass dieser mögliche Ausnahmefall im Widerspruch steht zu den gemachten Voraussetzungen.

Satz 2. „In jeder beliebigen Reciprocität R, r umhüllen alle Kurven, welche durch ihre zugeordneten Punkte gehen, eine Kurve 2. Klasse, welche man die Polarkurve der beliebigen Reciprocität nennt. Ihre Gleichung lautet

(9) $$[U \cdot UR] = 0.“$$

Abschnitt III.

Die Beziehungen der 4 extensiven Brüche zu einander und die konjugierte Reciprocität.

Da ich wirklich in der beliebigen Reciprocität analoge Gebilde zu der Pol- und Polarkurve der Polarreciprocität gefunden habe, so handelt es sich jetzt darum, die Beziehungen zwischen Pol- und Polarkurve in der allgemeinen Reciprocität

zu untersuchen. Zu dem Zwecke untersuche ich zunächst, welche Beziehungen zwischen den 4 extensiven Brüchen r, R, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{R}$ obwalten. Ich gehe aus von I (6) und ersetze hierin die A_i durch die in (8) angegebenen Werte, d. h. ich drücke die A_i durch die E_i aus, dann erhalte ich

(1) $$e_i r = a_{i1} E_1 + a_{i2} E_2 + a_{i3} E_3, \text{ wo } i = 1, 2, 3.$$

Andererseits ist nach I (16)

(2) $$a\, e_k = a_{1k} a_1 + a_{2k} a_2 + a_{3k} a_3, \text{ wo } k = 1, 2, 3.$$

Jetzt multipliziere ich (2) mit $\frac{1}{R}$ und beachte die Beziehung I (20), dann folgt aus (2)

(3) $$e_k \frac{a}{R} = a_{1k} E_1 + a_{2k} E_2 + a_{3k} E_3, \text{ wo } k = 1, 2, 3.$$

Setze ich in (3) noch $k = i$ und vergleiche dann (3) mit (1), so stimmen beide Ausdrücke überein, nur dass die Indices der Koefficienten gegen einander transponiert sind. Ich führe nun für die Reciprocität mit transponierten Indices nach Clebsch-Lindemann die Bezeichnung „konjugiert“ ein und für sie den Buchstaben r_1, dann ist

(4) $$r_1 = \frac{a}{R},$$

welche Gleichung den Satz enthält.

Satz 3. „Die konjugierte Reciprocität r_1 zu einer beliebigen Reciprocität r ist von der inversen Reciprocität $\frac{1}{R}$ nur um den Faktor a verschieden, d. h. es besteht die Gleichung (4).“

Setze ich nun tatsächlich in (3) $k = i$, so folgt

(5) $$e_i \frac{a}{R} = a_{1i} E_1 + a_{2i} E_2 + a_{3i} E_3, \text{ wo } i = 1, 2, 3.$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass die beiden extensiven Reciprocitätsbrüche r und $\frac{a}{R}$ nicht etwa bis auf einen Zahlfaktor gleich sein können. Es kann nämlich auf keinen Fall eine Gleichung von der Form bestehen

$$r = g \frac{a}{R}, \tag{6}$$

wo g ein Zahlfaktor ist. Denn wenn dies der Fall wäre, wenn also die Gleichung (6) bestände, so müsste auch die daraus folgende Gleichung bestehen

$$e_i r = g\, e_i \frac{a}{R}, \text{ wo } i = 1, 2, 3, \tag{7}$$

woraus nach (1) und (5) folgt

$$a_{i1} + E_1\, a_{i2}\, E_2 + a_{i3}\, E_3 = g\ (a_{1i}\, E_1 + a_{2i}\, E_2 + a_{3i}\, E_3), \quad \text{wo } i = 1, 2, 3. \tag{8}$$

Jede von diesen Gleichungen zerfällt in 3 Zahlgleichungen, so dass ich im ganzen die 9 Zahlgleichungen erhalten würde

$$a_{ik} = g\, a_{ki}, \text{ wo } i = 1, 2, 3 \text{ und } k = 1, 2, 3. \tag{9}$$

Ich muss nun nach Obigem annehmen, dass g von (+ 1) verschieden ist, denn sonst wäre ja

$$r = r_1, \tag{10}$$

d. h. die konjugierte Reciprocität r_1 wäre identisch mit der beliebigen r. Dies gilt aber wieder für die spezielle Polarreciprocität, denn nach I (22) ist $r = \frac{a}{R}$ eine Bedingung der Polarreciprocität, und wenn ich diese Gleichung mit (4) kombiniere, so erhalte ich die Beziehung (10), woraus ersichtlich ist, dass auch (10) eine Bedingung der Polar-

reciprocität verkörpert. Mit Rücksicht hierauf muss also die Beziehung gelten

(11) $$g = \pm 1.$$

Setze ich jetzt in (9) $k = i$, so ergibt sich

(12) $$a_{ii} = g\, a_{ii}, \text{ wo } i = 1, 2, 3,$$

oder

(13) $$a_{ii}(1 - g) = 0, \text{ wo } i = 1, 2, 3.$$

Mit Rücksicht auf (11) muss aus (13) folgen

(14) $$(1 - g) \neq 0,$$

und dann ist

(15) $$a_{ii} = 0, \text{ wo } i = 1, 2, 3.$$

Die Bedeutung dieser Gleichung wird etwas später erörtert werden. Bildet man die (12) entsprechende Gleichung für $i < k$, so ergibt sich

(16) $a_{ik} = g\, a_{ki}$, wo $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3$ und $i < k$.

Diese Gleichung gilt natürlich auch für $i > k$. Dies will ich dadurch zum Ausdruck bringen, dass ich in (16) i mit k vertausche, während ich nach wie vor an der ersten Voraussetzung festhalte. Somit erhalte ich dann

(17) $$a_{ki} = g\, a_{ik}, \text{ wo } i = 1, 2, 3 \text{ und } k = 1, 2, 3.$$

Aus (16) und (17) folgt dann

(18) $$a_{ik} = g^2\, a_{ki}, \text{ wo } i = 1, 2, 3 \text{ und } k = 1, 2, 3,$$

und also

(19) $$g^2 = 1,$$

woraus sich mit Rücksicht auf (11) ergibt

(20) $$g = -1.$$

Aus dieser Beziehung (20) folgt nun wieder die Form, die dem Nullsystem im Raume entspricht. Um dies zu erkennen, verfahre ich folgendermassen. Aus (20) und (17) folgt

$$(21) \qquad a_{ki} = -a_{ik}, \text{ wo } i = 1, 2, 3 \text{ und } k = 1, 2, 3,$$

und ich muss nun nachweisen, dass in dem im 2. Abschnitt angeführten Ausnahmefall tatsächlich die Beziehung (21) besteht. Für den Ausnahmefall hatte der Reciprocitätsbruch r die Form II (2). Bezeichne ich die Ableitzahlen von d mit b_1, b_2, b_3, so ist

$$(22) \qquad d = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3.$$

(22) multipliziere ich vor beziehungsweise mit e_1, e_2, e_3 und erhalte

$$(23) \qquad \begin{cases} [e_1 d] = & 0 & - b_3 E_2 & + b_2 E_3 \\ [e_2 d] = & b_3 E_1 & + 0 & - b_1 E_3 \\ [e_3 d] = & - b_2 E_1 & + b_1 E_2 & + 0. \end{cases}$$

Nun ist aber $[e_1 d]$ nur ein anderer Ausdruck für A_1, denn durch die Reciprocität r sollte ja e_1 in A_1 übergeführt werden, und entsprechend $[e_2 d]$ und $[e_3 d]$. Vergleiche ich nun (23) mit I (8), so ist sofort ersichtlich, dass die Beziehungen bestehen müssen

$$(24) \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0, \text{ d. h. } a_{ii} = 0, \text{ wo } i = 1, 2, 3,$$

was schon durch (15) ausgesprochen war. Und ausserdem ergibt sich noch aus der Vergleichung der beiden Gleichungsgruppen

$$(25) \qquad \begin{cases} a_{12} = -b_3 \\ a_{21} = +b_3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{31} = -b_2 \\ a_{13} = +b_2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{23} = -b_1 \\ a_{32} = +b_1, \end{cases}$$

woraus wieder folgt

$$(26) \qquad a_{12} = -a_{21}, \; a_{23} = -a_{32}, \; a_{31} = -a_{13},$$

oder

$$(27) \qquad a_{ik} = -a_{ki}, \text{ wo } i = 1, 2, 3 \text{ und } k = 1, 2, 3,$$

was schon durch (21) ausgedrückt war. Setzt man also $\varrho = -1$, so erhält man tatsächlich die Form, die dem Nullsystem im Raume entspricht. Für die Betrachtung der beliebigen Reciprocität ist also auch die Beziehung (27) auszuschalten. Aus diesen Erörterungen folgt nun offenbar, dass r und $\frac{\mathfrak{a}}{R}$ im allgemeinen nicht bis auf einen Zahlfaktor gleich sein können, denn der Zahlfaktor, der in Frage kommt, ist ± 1, und diese Fälle bilden dann Spezialfälle der beliebigen Reciprocität. Um aber dies Ergebnis weiter verwerten zu können, muss ich noch eine Voraussetzung machen, dass nämlich die Determinante $\mathfrak{a}$ nicht verschwinden soll. Verschwindet nämlich diese, d. h. ist $\mathfrak{a} = 0$, so artet die beliebige Reciprocität aus.

Schliesse ich nun vorläufig jede Reciprocität mit verschwindender Determinante von der Betrachtung aus, setze ich also voraus, dass die Beziehung gilt

$$\mathfrak{a} \neq 0, \tag{28}$$

so kann ich mit Sicherheit behaupten, dass im allgemeinen die Reciprocitätsbrüche r und $\frac{\mathfrak{a}}{R}$ nicht etwa bis auf einen Zahlfaktor einander gleich sein können. Wenn ich nun entsprechend des Zeichens $=$ und dazu $\neq$ das Zeichen $\equiv$ für Gleichheit bis auf einen Zahlfaktor einführe und dazu das Zeichen $\not\equiv$, was bedeuten soll, dass die Grössen nicht bis auf einen Zahlfaktor einander gleich sind — bei geometrischen Gebilden würde man sagen „räumlich verschieden“ —, so besteht offenbar die Beziehung

$$r \not\equiv \frac{\mathfrak{a}}{R}, \tag{29}$$

welche den Satz enthält

Satz 4. „Bei einer nicht ausartenden und auch nicht involutorischen Reciprocität r, R gilt allgemein mit Ausnahme einzelner Punkte x die Beziehung (29).“

Ich muss einzelne Punkte x ausnehmen, denn ich habe vorausgesetzt, dass wenigstens für einen Index a_{ik} von a_{ki} verschieden ist, nicht aber für alle Indices, und diese Voraussetzung bedingt die im Satz 4 gemachte Ausnahme.

Aus (29) lässt sich noch unmittelbar ableiten

$$R \equiv \frac{a}{r}, \tag{30}$$

welche Beziehung, wenn ich dieselbe Annahme wie eben berücksichtige, den Satz enthält

Satz 5. „Bei einer nicht ausartenden und auch nicht involutorischen Reciprocität R, r gilt allgemein mit Ausnahme einzelner Stäbe U die Beziehung (30).“

Berücksichtige ich I (1) und multipliziere nun (1) und (3) beziehungsweise mit e_k und e_i vor, so erhalte ich

$$[e_k \cdot e_i\, r] = a_{ik} \tag{31}$$

und

$$\left[e_i \cdot e_k \frac{a}{R}\right] = a_{ik}. \tag{32}$$

Hieraus folgt dann weiter

$$[e_k \cdot e_i\, r] = \left[e_i \cdot e_k \frac{a}{R}\right], \tag{33}$$

woraus ich einen Schluss ziehen will auf 2 beliebige Punkte y und z. Zu dem Zwecke setze ich

$$y = \sum_1^3{}_i\, \eta_i\, e_i \text{ und } z = \sum_1^3{}_k\, \zeta_k\, e_k \tag{34}$$

und bilde den Ausdruck $[z \cdot yr]$, der dann die Form annimmt

$$[z \cdot yr] = \left[y \cdot z \frac{a}{R}\right] \tag{35}$$

Da für die beiden beliebigen Punkte y und z die Beziehung (35) gilt, so gilt insbesondere auch für jeden beliebigen Punkt x

$$[x \cdot xr] = \left[x \cdot x\frac{a}{R}\right]. \tag{36}$$

Da ich oben vorausgesetzt hatte, dass die Determinante a nicht verschwinden soll, so folgt mit Rücksicht auf II (1) aus (36) noch die Beziehung

$$\left[x \cdot x\frac{1}{R}\right] = 0, \tag{37}$$

was besagt, dass die Gleichungen II (1) und (37) sich gegenseitig ersetzen. (37) ist nun offenbar eine 2. Form der Polkurve der beliebigen Reciprocität, und wenn ich berücksichtige, dass durch den Ausdruck $\frac{a}{R}$ die konjugierte Reciprocität bedingt ist, so lässt sich das Ergebnis zusammenfassen in

Satz 6. „Die Gleichung der Polkurve einer beliebigen nicht ausartenden und auch nicht involutorischen Reciprocität hat noch die 2. Form (37), d. h. in jeder beliebigen Reciprocität fällt ihre eigene Polkurve mit der Polkurve der konjugierten Reciprocität zusammen."

Aus den Gleichungen II (1) und (37), die sich ja gegenseitig ersetzen, folgt noch ein anderer Satz. Durch die Reciprocität r wird der Punkt x übergeführt in den Stab $U = xr$, was ich dadurch bezeichnen will, dass ich sage, der Stab $U = xr$ entspricht dem Punkte x vorwärts. Andererseits wird der Punkt x durch die Reciprocität $\frac{1}{R}$ auch in einen Stab $U_1 = x\frac{1}{R}$ übergeführt, der im allgemeinen von U verschieden sein wird, was ich dadurch bezeichnen will, dass ich sage, der Stab $U_1 = x\frac{1}{R}$ entspricht dem Punkte x rückwärts. Soll nun der Punkt x auf U liegen, so liegt er nach II (1) und (37) offenbar auch auf U_1, denn die Gleichungen

II (1) und (37) ersetzen sich ja gegenseitig, d. h. x ist dann der Schnittpunkt der beiden Stäbe U und U_1.

Satz 7. „Liegt in einer beliebigen Reciprocität ein Punkt x auf dem ihm vorwärts entsprechenden Stabe xr, so liegt er auch auf dem ihm rückwärts entsprechenden Stabe $x\,\frac{1}{R}$.“

Ganz analog kann man die dualistisch entsprechenden Formeln ableiten. Der Gleichung (36) entsprechend ergibt sich hier

$$[U \cdot UR] = \left[U \cdot U\,\frac{a}{r}\right], \tag{38}$$

woraus wieder folgt

$$\left[U \cdot U\,\frac{1}{r}\right] = 0; \tag{39}$$

und diese Beziehung enthält den

Satz 8. „Die Gleichung der Polarkurve einer beliebigen nicht ausartenden und nicht involutorischen Reciprocität hat noch die 2. Form (39), d. h. in jeder beliebigen Reciprocität fällt ihre eigene Polarkurve mit der Polarkurve der konjugierten Reciprocität zusammen.“

Ferner ergibt sich dem Satze 7 analog hier der

Satz 9. „Geht in einer beliebigen Reciprocität ein Stab U durch den ihm vorwärts entsprechenden Punkt UR, so geht er auch durch den ihm rückwärts entsprechenden Punkt $U\,\frac{1}{r}$.“

Abschnitt IV.

Reciprocitätsverhältnis zwischen Pol- und Polarkurve.

Nachdem ich die Beziehungen zwischen den 4 extensiven Brüchen untersucht habe, will ich jetzt das Reciprocitätsverhältnis zwischen Pol- und Polarkurve betrachten und gehe deshalb aus von der zuerst gefundenen Gleichung der Polkurve

(1) $$[x \cdot xr] = 0.$$

Unterwirft man jetzt die Punkt- und Stabfaktoren der linken Seite dieser Gleichung der Transformierung durch die Reciprocität mit Hülfe der extensiven Brüche r, R, so erhält man die Gleichung

(2) $$[xr \cdot xrR] = 0,$$

worin xr einen Stab bezeichnet. Setze ich nun

(3) $$xr = V,$$

so folgt aus (2)

(4) $$[V \cdot VR] = 0,$$

und dies ist die Gleichung der Polarkurve.

Satz 10. „Durch jede Reciprocität r, R wird ihre eigene Polkurve in die Polarkurve übergeführt, oder mit anderen Worten, in jeder beliebigen Reciprocität r, R ist die einem Punkte x der Polkurve zugeordnete Kurve xr eine Tangente der Polarkurve, und der Punkt liegt auf seiner ihm zugeordneten Kurve."

Gehe ich andererseits aus von der ersten Gleichungsform der Polarkurve

(5) $$[U \cdot UR] = 0$$

und unterwerfe die Stab- und Punktfaktoren der linken Seite der Transformierung durch die Reciprocität mit Hülfe der extensiven Brüche R, r, so erhalte ich die Gleichung

(6) $$[UR \cdot URr] = 0,$$

worin UR einen Punkt bedeutet. Setze ich nun

(7) $$UR = y,$$

so folgt aus (6)

(8) $$[y \cdot yr] = 0,$$

und dies ist wieder die Gleichung der Polkurve.

Satz 11. „Durch jede Reciprocität R, r wird ihre eigene Polarkurve in die Polkurve übergeführt, oder mit anderen Worten, in jeder beliebigen Reciprocität R, r ist der einer Tangente U der Polarkurve zugeordnete Punkt UR ein Punkt der Polkurve, und die Tangente geht durch den zugeordneten Punkt."

In ganz analoger Weise lassen sich die Sätze 10 und 11 auch ableiten, wenn ich für die Gleichungen der Pol- und Polarkurve die andere Form benutze. Ich will diese Ableitung nicht durchführen, sondern nur darauf hinweisen, dass diese 2. Ausdrücke, wie sie in III (37) und III (39) dargestellt sind, zugleich die Gleichungen der Pol- und Polarkurve der konjugierten Reciprocität enthalten, ich brauche nur statt $\frac{1}{R}$ und $\frac{1}{r}$ zu setzen $\frac{a}{R}$ und $\frac{a}{r}$, um dann die ganz entsprechenden Ergebnisse zu erhalten. Somit ergeben sich die allgemeineren Sätze

Satz 12. „Durch jede Reciprocität, auch durch die konjugierte, wird ihre eigene Polkurve in die Polarkurve übergeführt, oder mit anderen Worten, in jeder beliebigen Reciprocität r, R ist ebenso wie in der konjugierten $\frac{a}{R}, \frac{a}{r}$ die einem Punkte x der Polkurve zugeordnete Kurve xr resp. $x\,\frac{a}{R}$ eine Tangente der Polarkurve, und der Punkt liegt auf seiner zugeordneten Kurve"; und

Satz 13. „Durch jede Reciprocität, auch durch die konjugierte, wird ihre eigene Polarkurve in die Polkurve über-

geführt, oder mit anderen Worten, in jeder beliebigen Reciprocität R, r ist ebenso wie in der konjugierten $\frac{a}{r}$, $\frac{a}{R}$ der einer Tangente U der Polarkurve zugeordnete Punkt UR resp. U $\frac{a}{r}$ ein Punkt der Polkurve, und die Tangente geht durch ihren zugeordneten Punkt.“

Abschnitt V.

Die Doppelelemente der Reciprocität und die Lage von Pol- und Polarkurve.

Da ich durch die im vorigen Abschnitt abgeleiteten Sätze bewiesen habe, dass im allgemeinen jedem Punkte durch die Reciprocität 2 Grade zugeordnet sind, dass also auch im allgemeinen von jedem Punkte der Polkurve sich 2 reelle Tangenten an die Polarkurve ziehen lassen, so geht daraus hervor, dass die Polarkurve ganz innerhalb der Polkurve liegen muss. Zugleich lässt sich aus dieser Zuordnung, wie überhaupt aus der Definition der Pol- und Polarkurve noch folgern, dass die Realität der einen auch die der anderen bedingt, dass also beide Ordnungskurven zugleich reell oder imaginaer sind. Sind sie imaginaer, so werden sie ersetzt durch 2 reciproke Systeme, deren Projektivitätsbeziehung durch 4 Paare zugeordneter Elemente bestimmt ist. Es könnte nun noch der Fall eintreten, dass die beiden von einem Punkte der Polkurve an die Polarkurve gezogenen Tangenten in eine zusammenfallen, dass sich also die Kurven doppelt berühren. Auf diese mögliche Lage werde ich schon dadurch hingewiesen, dass ich oben bei der doppelten reciproken Beziehung einen gewissen Vorbehalt in Bezug auf einige Stäbe resp. einige Punkte machen musste. Ich hatte gefunden,

dass ein Punkt x der Polkurve durch die Reciprocität r übergeht in die Tangente U der Polarkurve, wenn ich setze

$$xr = U. \tag{1}$$

U entspricht also dem Punkt x vorwärts. Andererseits geht die Tangente U der Polarkurve durch die Reciprocität $\frac{1}{r}$ wieder über in denselben Punkt x der Polkurve, also

$$U\frac{1}{r} = x, \tag{2}$$

d. h. der Punkt x entspricht dem Stabe U rückwärts. Dies ergibt unter demselben Vorbehalt wie oben den

Satz 14. „Entspricht einem Punkte x der Polkurve eine Tangente U der Polarkurve vorwärts, so entspricht umgekehrt der Punkt x auch der Tangente U und zwar mit Ausnahme einzelner Punkte rückwärts und nicht etwa auch vorwärts."

Wenn ich die dualistische Betrachtung durchführe, so erhalte ich dann das analoge Ergebnis.

Satz 15. „Entspricht einer Tangente U der Polarkurve ein Punkt x der Polkurve vorwärts, so entspricht umgekehrt auch die Tangente U dem Punkte x, und zwar mit Ausnahme einiger Tangenten rückwärts und nicht etwa auch vorwärts."

Wenn sich also die beiden Ordnungskurven irgendwie berühren sollen, so fallen doch offenbar die von diesem Punkte aus an die Polarkurve gezogenen beiden Tangenten in eine zusammen, d. h. ich erhalte eine Doppelgerade, und die der im Berührungspunkte an die Polarkurve gelegten Tangente durch die Reciprocität zugeordneten Punkte der Polkurve fallen auch in einen, nämlich den Berührungspunkt zusammen, d. h. ich erhalte einen Doppelpunkt. Wenn also eine solche Doppelberührung stattfinden soll, und wenn ich dabei die letzten Ergebnisse berücksichtige, so muss es doch in der Ebene der Pol- und Polarkurve Punkte x_p geben, die durch

die Reciprocität r in Stäbe U_p übergeführt werden, und wobei diese Stäbe U_p durch die Reciprocität R wieder in dieselben Punkte x_p, oder wenigstens in kongruente übergehen. Hierbei ist $p = 1, 2, \ldots n$. Es muss also die Gleichung bestehen

$$x_p \, rR = \varrho_p \, x_p, \tag{3}$$

wo ϱ_p ein Zahl- resp. Massenfaktor ist, woraus sich nach I (3) ergibt, wenn ich mit ξ_{pi} die Ableitzahlen von x_p bezeichne

$$\begin{aligned} &\xi_{p1}(e_1 \varrho_p - e_1 rR) + \xi_{p2}(e_2 \varrho_p - e_2 rR) \\ &\quad + \xi_{p3}(e_3 \varrho_p - e_3 rR) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Hier können nun nicht alle 3 Ableitzahlen von x_p gleichzeitig verschwinden, sondern ich will annehmen, dass die Beziehung bestände

$$\xi_{p1} \neq 0. \tag{5}$$

Multipliziere ich jetzt (4) mit dem Produkt

$$[(e_2 \varrho_p - e_2 rR)(e_3 \varrho_p - e_3 rR)], \tag{6}$$

d. h. wende ich die äussere Multiplikation an, so erhalte ich

$$[(e_1 \varrho_p - A_1 R)(e_2 \varrho_p - A_2 R)(e_3 \varrho_p - A_3 R)] = 0. \tag{7}$$

Dies ist aber eine Gleichung 3. Grades in ϱ_p, die im allgemeinen und höchstens 3 Wurzeln hat, die mit ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 bezeichnet sein mögen. Es gibt also in der Ebene der Pol- und Polarkurve höchstens 3 Punkte, die durch doppelte reciproke Beziehung wieder in sich selbst übergehen. Von diesen ist der eine sicher immer reell, da die kubische Gleichung (7) stets eine reelle Wurzel hat. Über ihre Lage kann ich zunächst nichts Näheres aussagen. Nehme ich vor der Hand einmal an, die Gleichung (7) habe 3 reelle und von einander verschiedene Wurzeln, so gibt es auch 3 reelle und von einander verschiedene Doppelpunkte. Von diesen können nur 2 auf der Pol- resp. Polarkurve liegen, nicht aber alle 3,

denn dann würden ja Pol- und Polarkurve vollständig zusammenfallen, vorausgesetzt, dass die Punkte alle 3 Berührungspunkte sind. Man kann dies auch leicht analytisch nachweisen.

Ich gehe davon aus, dass einer Geraden sowohl durch die Reciprocität R wie durch die Reciprocität $\frac{1}{r}$ ein und derselbe Punkt zugeordnet sein soll, also sowohl vorwärts wie rückwärts. Ich nehme 3 Stäbe U_i, $i = 1, 2, 3$, die Tangenten der Polarkurve sind, als gegeben an; sind dann u_{ik} ihre Ableitzahlen, so besteht die Beziehung in der Form I (4), die durch die Reciprocität R übergeht in

$$U_i R = u_{i1} a_1 + u_{i2} a_2 + u_{i3} a_3. \tag{8}$$

Drücke ich die a_i durch die e_i aus, so folgt aus (8)

$$U_i R = u_{i1} (\mathfrak{A}_{11} e_1 + \mathfrak{A}_{12} e_2 + \mathfrak{A}_{13} e_3) + u_{i2} (\mathfrak{A}_{21} e_1 + \mathfrak{A}_{22} e_2 + \mathfrak{A}_{23} e_3) + u_{i3} (\mathfrak{A}_{31} e_1 + \mathfrak{A}_{32} e_2 + \mathfrak{A}_{33} e_3). \tag{9}$$

Andererseits folgt durch die Reciprocität $\frac{1}{r}$, oder besser durch $\frac{a}{r}$

$$U_i \frac{a}{r} = u_{i1} E_1 \frac{a}{r} + u_{i2} E_2 \frac{a}{r} + u_{i3} E_3 \frac{a}{r}, \quad \text{wo } i = 1, 2, 3. \tag{10}$$

Drücke ich nun die E_i durch die A_i aus, so folgt aus (10)

$$U_i \frac{a}{r} = u_{i1} (\mathfrak{A}_{11} e_1 + \mathfrak{A}_{21} e_2 + \mathfrak{A}_{31} e_3) + u_{i2} (\mathfrak{A}_{12} e_1 + \mathfrak{A}_{22} e_2 + \mathfrak{A}_{32} e_3) + u_{i3} (\mathfrak{A}_{13} e_1 + \mathfrak{A}_{23} e_2 + \mathfrak{A}_{33} e_3). \tag{11}$$

Wenn nun 3 gemeinsame Punkte der beiden Kurven vorhanden sein sollen, so muss doch offenbar die Gleichung bestehen

(12) $$U_i R = U_i \frac{a}{r}, \text{ wo } i = 1, 2, 3,$$

oder ausgeschrieben

(13) $$\left\{\begin{array}{l} u_{i1}(\mathfrak{A}_{11} e_1 + \mathfrak{A}_{12} e_2 + \mathfrak{A}_{13} e_3) \\ + u_{i2}(\mathfrak{A}_{21} e_1 + \mathfrak{A}_{22} e_2 + \mathfrak{A}_{23} e_3) \\ + u_{i3}(\mathfrak{A}_{31} e_1 + \mathfrak{A}_{32} e_2 + \mathfrak{A}_{33} e_3) \end{array}\right\}$$
$$= \left\{\begin{array}{l} u_{i1}(\mathfrak{A}_{11} e_1 + \mathfrak{A}_{21} e_2 + \mathfrak{A}_{31} e_3) \\ + u_{i2}(\mathfrak{A}_{12} e_1 + \mathfrak{A}_{22} e_2 + \mathfrak{A}_{32} e_3) \\ + u_{i3}(\mathfrak{A}_{13} e_1 + \mathfrak{A}_{23} e_2 + \mathfrak{A}_{33} e_3) \end{array}\right\}$$

Es handelt sich nun darum, die rechte Seite dieser Gleichung so umzuformen, dass die Gleichung selbst eine identische wird, d. h. ich muss den durch die rechte Seite dieser Gleichung dargestellten Punkt in den überführen, der durch die linke Seite dargestellt wird, oder wenigstens in einen dazu kongruenten. Da die Ableitzahlen auf beiden Seiten gegen einander transponiert sind, so ist die Überführung im allgemeinen nicht möglich, sondern nur unter der speziellen Voraussetzung

(14) $$\mathfrak{A}_{ik} = \mathfrak{A}_{ki},$$

was aber zur Folge hat, dass auch

(15) $$a_{ik} = a_{ki},$$

und diese Voraussetzung gilt nur für das Polarsystem, nicht aber für die beliebige Reciprocität. Somit ist auch analytisch bewiesen, dass im allgemeinen bei 3 reellen und von einander verschiedenen Wurzeln der kubischen Gleichung die beiden Kurven nicht 3 gemeinsame Punkte haben können, d. h. es können höchstens 2 der 3 Doppelpunkte auf der Pol- resp. Polarkurve liegen.

Andererseits muss ich in der Ebene der Pol- und Polarkurve auch 3 Gerade erhalten, die durch doppelte reciproke Beziehung wieder in sich selbst resp. in kongruente Gerade

übergehen. Die Ableitung ist der dualistischen ganz analog. Hier erhalte ich die Gleichung 3. Grades

$$(16) \quad [(E_1 \mathfrak{S}_p - a_1 r)(E_2 \mathfrak{S}_p - a_2 r)(E_3 \mathfrak{S}_p - a_3 r)] = 0,$$

woraus folgt, dass in der Ebene der Pol- und Polarkurve tatsächlich aber höchstens 3 Gerade vorhanden sind, die durch doppelte reciproke Beziehung wieder in sich selbst übergehen. Von diesen ist die eine wieder sicher reell, da die kubische Gleichung (16) stets eine reelle Wurzel hat. Von diesen 3 Geraden kann ich nun in analoger Weise wie vorher zeigen, dass unter der Voraussetzung, dass die kubische Gleichung 3 reelle und von einander verschiedene Wurzeln hat, nicht alle 3 von ihnen Tangenten der Polarkurve sein können. In diesem Falle wäre wieder eine gewisse Identität nachzuweisen, was jedoch im allgemeinen nur möglich ist unter der speziellen Voraussetzung (15), die aber eine Bedingung des Polarsystems repräsentiert.

Unter der Voraussetzung, dass 3 reelle und von einander verschiedene Wurzeln $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{s}_3$ vorhanden sind, kann ich über die Lage der 3 Punkte x_p noch etwas angeben. Seien x_1, x_2, x_3 die 3 Doppelpunkte, so kann nicht der eine von ihnen mit den beiden anderen in einer Geraden liegen. Nehme ich an, dass z. B. x_3 mit x_1 und x_2 in einer Geraden läge, so müsste offenbar die Beziehung bestehen

$$(17) \quad x_3 = \mathfrak{g}_1 x_1 + \mathfrak{g}_2 x_2,$$

wo $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ Zahlfaktoren sind, d. h. ich müsste den Punkt x_3 als Vielfachensumme der beiden anderen darstellen können (natürlich auch x_1 resp. x_2). Durch Multiplikation mit den Reciprocitätsbrüchen rR folgt mit Rücksicht auf (3)

$$(18) \quad \mathfrak{s}_3 x_3 = \mathfrak{s}_1 \mathfrak{g}_1 x_1 + \mathfrak{s}_2 \mathfrak{g}_2 x_2,$$

oder nach (17)

$$(19) \quad x_1 \mathfrak{g}_1 (\mathfrak{s}_3 - \mathfrak{s}_1) + x_2 \mathfrak{g}_2 (\mathfrak{s}_3 - \mathfrak{s}_2) = 0.$$

Damit diese Gleichung erfüllt ist, muss einmal zwischen den Punkten x_1 und x_2 eine Zahlbeziehung bestehen und 2. müssen die Beziehungen gelten

(20) $$\xi_3 - \xi_1 = 0 \text{ und } \xi_3 - \xi_2 = 0,$$

welche jedoch der Voraussetzung widersprechen, dass alle 3 Wurzeln ξ_1, ξ_2, ξ_3 von einander verschieden sein sollen. Diese Beziehungen sind also nicht erfüllt. Es besteht aber auch zwischen den Punkten x_1 und x_2 keine Zahlbeziehung, was sich folgendermassen nachweisen lässt. Bestände nämlich zwischen x_1 und x_2 eine Zahlbeziehung, so müsste die Gleichung gelten

(21) $$x_1 = \mathfrak{g} x_2,$$

wo $\mathfrak{g}$ ein Zahlfaktor ist. Durch Multiplikation mit den Reciprocitätsbrüchen rR ergibt sich mit Rücksicht auf (3) und (21)

(22) $$\mathfrak{g}\xi_1 x_2 = \mathfrak{g}\xi_2 x_2$$

woraus folgt

(23) $$\xi_1 = \xi_2,$$

was jedoch wieder der Voraussetzung widerspricht, dass alle Wurzeln ξ_1, ξ_2, ξ_3 von einander verschieden sein sollen; also besteht zwischen den einzelnen Punkten keine Zahlbeziehung und die Punkte selbst können nicht in einer Geraden liegen.

Satz 16. „Unter der Voraussetzung, dass in der Ebene der Pol- und Polarkurve 3 reelle und von einander verschiedene Doppelpunkte vorhanden sind, liegen diese 3 Doppelpunkte nicht in einer Geraden, auch besteht zwischen je 2 von ihnen keine Zahlbeziehung.“

Die analoge Untersuchung des Dualistischen gibt mir dem Satze 16 entsprechend den

Satz 17. Unter der Voraussetzung, dass in der Ebene der Pol- und Polarkurve 3 reelle und von einander verschiedene Doppelgerade vorhanden sind, gehen die Doppel-

geraden nicht durch einen Punkt, auch besteht zwischen je 2 von ihnen keine Zahlbeziehung."

Nachdem so einige Eigenschaften der 3 Doppelpunkte und Doppelgeraden nachgewiesen sind, kommt es jetzt darauf an, ihre Lage in der Ebene der Pol- und Polarkurve fest zu bestimmen. Ich habe nachgewiesen, dass unter der Voraussetzung der Realität und Verschiedenheit der 3 Doppelpunkte höchstens 2 der Doppelpunkte auf der Polkurve liegen können, und es lässt sich nun zeigen, dass tatsächlich 2 Doppelpunkte auf der Polkurve liegen. Die Berührungspunkte der beiden Kurven, wenn solche vorhanden sind, sind Doppelpunkte und die Tangenten in ihnen Doppelgerade, denn die beiden von einem Berührungspunkt an die Polarkurve gezogenen Tangenten fallen in eine zusammen, und die beiden Schnittpunkte der Tangente in diesem Punkte mit der Polkurve fallen in einen zusammen. Ferner ist auch nach der Definition von Pol- und Polarkurve, da ja zugeordnete Elemente incident sein müssen, dem Berührungspunkte die durch ihn gehende Tangente zugewiesen. Nehme ich nun an, es lägen 2 Doppelpunkte auf der Polkurve, es hätten also Pol- und Polarkurve eine doppelte Berührung, so kann ich, wenn ich die Polarkurve als die gegebene betrachte, die Polkurve auffassen als zugehörig zu einem Büschel von Kegelschnitten, die alle mit der Polarkurve in denselben Punkten, d. h. also in den beiden Doppelpunkten eine doppelte Berührung haben, und zwar kann die doppelte Berührung reell und auch imaginär sein. Ein solches Kegelschnittbüschel wird repräsentiert durch die Gleichung

$$\Phi - \mathfrak{g} L^2 = 0, \tag{24}$$

wo für den vorliegenden Fall Φ die Polarkurve in Punktkoordinaten bedeutet, L die allen Kegelschnitten gemeinsame Berührungssehne, $\mathfrak{g}$ einen variablen Parameter, durch dessen verschiedene Werte ich die verschiedenen Kegelschnitte des Büschels erhalte. Bei dieser Bedeutung der Buchstaben besteht jetzt meine Aufgabe darin, zu untersuchen, ob sich für

irgend einen Wert von ϱ die Gleichung (24) in die Gleichung der Polkurve, oder wenigstens in eine damit kongruente, die sich also nur durch einen Zahlfaktor unterscheidet, überführen lässt. Und wenn sich dies nachweisen lässt, so gehört die Polkurve zu dem Kegelschnittbüschel, das mit der Polarkurve eine doppelte Berührung hat, d. h. Pol- und Polarkurve haben eine doppelte Berührung.

Zunächst kommt es darauf an, die Gerade L, d. h. also die Berührungssehne zu finden. Da ich noch nicht weiss, ob eine doppelte Berührung stattfindet, ob also überhaupt eine Berührungssehne existiert, da ich andererseits aber vermuten kann, dass im Falle einer doppelten Berührung die Berührungssehne eine Doppelgerade sein wird, so benutze ich eine Gerade, die sich aus einer anderen Betrachtung ergibt und die sich als Doppelgerade nachweisen lässt. Zu dem Zwecke muss ich hier eine Hülfsbetrachtung einschalten.

Einem beliebigen Punkte x sind durch die Reciprocität im allgemeinen 2 Stäbe U_1 und U_2 zugeordnet. Es ist dann

(25) $$U_1 = xr$$

und

(26) $$U_2 = x\frac{a}{R}.$$

Sind nun ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die Ableitzahlen von x, so folgt aus (25)

(27) $$U_1 = xr = \varrho_1 A_1 + \varrho_2 A_2 + \varrho_3 A_3,$$

oder wenn ich die A_i durch die E_i ausdrücke

(28) $$U_1 = xr = \varrho_1 \sum_1^3{}^i a_{1i} E_i + \varrho_2 \sum_1^3{}^i a_{2i} E_i + \varrho_3 \sum_1^3{}^i a_{3i} E_i.$$

Andererseits folgt aus (26) mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\frac{1}{R}$

(29) $$U_2 = x\frac{a}{R} = \varrho_1 \sum_1^3{}^k a_{k1} E_k + \varrho_2 \sum_1^3{}^k a_{k2} E_k + \varrho_3 \sum_1^3{}^k a_{k3} E_k$$

Ich subtrahiere jetzt (29) von (28) und erhalte

$$(30)\quad \begin{aligned} U_1 - U_2 = \mathfrak{x}_1 &\left\{ E_2 (a_{12} - a_{21}) + E_3 (a_{13} - a_{31}) \right\} \\ + \mathfrak{x}_2 &\left\{ E_1 (a_{21} - a_{12}) + E_3 (a_{23} - a_{32}) \right\} \\ + \mathfrak{x}_3 &\left\{ E_1 (a_{31} - a_{13}) + E_2 (a_{32} - a_{23}) \right\}, \end{aligned}$$

worin ich substituieren will

$$(31)\quad a_{23} - a_{32} = m, \quad a_{31} - a_{13} = n, \quad a_{12} - a_{21} = p;$$

dann folgt aus (30), wenn ich noch nach E_i auflöse

$$(32)\quad \begin{aligned} U_1 - U_2 = E_1 (n\,\mathfrak{x}_3 - p\,\mathfrak{x}_2) + E_2 (p\,\mathfrak{x}_1 - m\,\mathfrak{x}_3) \\ + E_3 (m\,\mathfrak{x}_2 - n\,\mathfrak{x}_1). \end{aligned}$$

Ich bilde jetzt mit Hülfe der Substitutionsgleichungen (31) den Punkt 1

$$(33)\quad 1 = m\,e_1 + n\,e_2 + p\,e_3,$$

der eine grosse Bedeutung hat.

Andererseits sind einem beliebigen Stabe U durch die Reciprocität im allgemeinen 2 Punkte x_1 und x_2 zugeordnet, und wenn ich dann analog der eben durchgeführten Untersuchung verfahre, erhalte ich den neuen Punkt

$$(34)\quad \begin{aligned} x_1 - x_2 = u_1 &\left\{ e_2 (\mathfrak{A}_{12} - \mathfrak{A}_{21}) + e_3 (\mathfrak{A}_{13} - \mathfrak{A}_{31}) \right\} \\ + u_2 &\left\{ e_1 (\mathfrak{A}_{21} - \mathfrak{A}_{12}) + e_3 (\mathfrak{A}_{23} - \mathfrak{A}_{32}) \right\} \\ + u_3 &\left\{ e_1 (\mathfrak{A}_{31} - \mathfrak{A}_{13}) + e_2 (\mathfrak{A}_{32} - \mathfrak{A}_{23}) \right\}. \end{aligned}$$

Jetzt substituiere ich

$$(35)\quad \mathfrak{A}_{23} - \mathfrak{A}_{32} = m_1, \quad \mathfrak{A}_{31} - \mathfrak{A}_{13} = n_1, \quad \mathfrak{A}_{12} - \mathfrak{A}_{21} = p_1,$$

dann folgt aus (34), wenn ich noch nach e_i ordne

$$(36)\quad \begin{aligned} x_1 - x_2 = e_1 (n_1 u_3 - p_1 u_2) + e_2 (p_1 u_1 - m_1 u_3) \\ + e_3 (m_1 u_2 - n_1 u_1). \end{aligned}$$

Jetzt bilde ich mit Hülfe der Substitutionsgleichungen (35) die Gerade

$$L = m_1 E_1 + n_1 E_2 + p_1 E_3, \tag{37}$$

die wie auch der Punkt 1 eine grosse Bedeutung hat.

Über die Bedeutung des Punktes 1 und der Geraden L lässt sich folgendes angeben. Zunächst liegt der Punkt 1 im allgemeinen nicht auf der Geraden L. Um dies nachzuweisen, habe ich das äussere Produkt aus L und 1 zu bilden und zu untersuchen, ob der Wert dieses O oder von O verschieden ist. Dieses Produkt wird

$$[L\,1] = [(m_1 E_1 + n_1 E_2 + p_1 E_3)(m e_1 + n e_2 + p e_3)], \tag{38}$$

oder wenn ich für $m_1 \ldots$ und $m \ldots$ die Werte aus (35) und (31) einsetze und ordne

$$\begin{aligned}(39)\quad \{ & a_{11}(a_{23} - a_{32})^2 + a_{22}(a_{31} - a_{13})^2 + a_{33}(a_{12} - a_{21})^2 \\ & + a_{21}(3\,a_{32}\,a_{13} - a_{23}\,a_{31}) - (a_{12} + a_{21})(a_{31}\,a_{32} + a_{13}\,a_{23}) \\ & + a_{12}(3\,a_{23}\,a_{31} - a_{32}\,a_{13}) \}.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist offenbar von O verschieden, er wird gleich O, wenn $a_{ii} = O$ und $a_{ik} = -a_{ki}$ werden, d. h. im Falle des Nullsystems. Es könnte nun aber noch der Fall eintreten, dass zwar nicht das Nullsystem vorliegt, dass also $a_{ii} \neq O$ und $a_{ik} \neq -a_{ki}$ ist, dass aber von den Grössen m, n, p eine oder zwei verschwinden. Alle 3 können nicht zu gleicher Zeit verschwinden, denn dann würden offenbar, wie aus (31) hervorgeht, alle $a_{ik} = a_{ki}$, d. h. ich hätte nicht mehr den Fall der beliebigen Reciprocität, sondern den Spezialfall des Polarsystems. Ich will nun einmal annehmen, dass $m \neq O$ sei, dagegen aber $n = p = O$, dann folgt zunächst aus (31)

$$a_{31} = a_{13} \text{ und } a_{12} = a_{21}, \tag{40}$$

und mit Rücksicht darauf aus (39)

$$(41) \qquad a_{11} m^2 - 2 a_{12} a_{13} (a_{32} + a_{23}) + a_{12} \left\{ 3 a_{13} (a_{23} + a_{32}) - a_{13} (a_{23} + a_{32}) \right\} = a_{11} m^2.$$

Da $m \neq 0$ und $a_{11} \neq 0$, so ist auch der ganze Ausdruck (39) von 0 verschieden. Analog ist das Verfahren, wenn m und p oder m und n verschwinden. Im vorliegenden Falle kann also der Ausdruck (39) nur dann noch verschwinden, wenn $a_{11} = 0$ wird; das bedeutet aber, dass der Grundstab A_1 durch den Eckpunkt e_1 des Fundamentaldreiecks geht, d. h. aber, dass der Punkt e_1 auf der Polkurve liegen muss, denn die Polkurve ist der geometrische Ort für alle die Punkte, die auf ihren zugeordneten Geraden liegen, und dass A_1 Tangente der Polarkurve ist. Wenn n oder p von 0 verschieden wären und der betreffende Ausdruck dann verschwinden sollte, so müssten a_{22} resp. a_{33} verschwinden, was eine analoge Deutung zulässt. Wenn ich also den speziellen Fall ausschliesse, dass einer der 3 Eckpunkte des Fundamentaldreiecks auf der Polkurve liege, und auch das Nullsystem, so ist das Produkt [L l] von 0 verschieden, d. h. der Punkt l und die Gerade L sind nicht incident.

Ferner lässt sich nachweisen, dass der Punkt l einer der 3 Doppelpunkte, die Gerade L eine der 3 Doppelgeraden ist. Wenn l ein Doppelpunkt sein soll, so muss er durch die Reciprocität r wie durch die Reciprocität $\frac{a}{R}$ in eine und dieselbe Gerade, oder wenigstens in 2 kongruente übergeführt werden, denn, wenn diese Bedingung erfüllt ist, muss auch rückwärts diese Gerade durch die beiden Reciprocitäten R und $\frac{a}{r}$ wieder in denselben Punkt l übergehen, d. h. aber mit anderen Worten, der Punkt l geht durch die Reciprocitäten r und R wieder in sich selbst resp. in einen mit sich kongruenten Punkt über. Demnach muss die Gleichung bestehen

$$(42) \qquad lr = g \cdot l \frac{a}{R},$$

wo g ein Zahlfaktor ist, den ich jedoch = 1 setzen kann, da es von gleicher Bedeutung ist, ob ich dieselbe oder eine kongruente Gerade erhalte. Es muss also die Beziehung gelten

$$lr = l\frac{a}{R}. \tag{43}$$

Aus (33) folgt durch Multiplikation mit r mit Rücksicht auf die Bedeutung von r

$$lr = m\,A_1 + n\,A_2 + p\,A_3, \tag{44}$$

oder wenn ich die A_i durch die E_i ausdrücke und gleich nach E_i auflöse

$$\begin{aligned} lr = {} & E_1(m\,a_{11} + n\,a_{21} + p\,a_{31}) \\ & + E_2(m\,a_{12} + n\,a_{22} + p\,a_{32}) + E_3(m\,a_{13} + n\,a_{23} + p\,a_{33}). \end{aligned} \tag{45}$$

Andererseits ergibt sich aus (33), wenn ich die e_i durch die a_i ausdrücke, mit dem Reciprocitätsbruche $\frac{a}{R}$ multipliziere und seine Bedeutung berücksichtige

$$\begin{aligned} l\frac{a}{R} = {} & E_1(m\,a_{11} + n\,a_{12} + p\,a_{13}) \\ & + E_2(m\,a_{21} + n\,a_{22} + p\,a_{23}) + E_3(m\,a_{31} + n\,a_{32}\,p\,a_{33}). \end{aligned} \tag{46}$$

Wenn nun (43) bestehen soll, so müssen unbedingt folgende Gleichungen erfüllt sein

$$\left\{\begin{aligned} m\,a_{11} + n\,a_{21} + p\,a_{31} &= m\,a_{11} + n\,a_{12} + p\,a_{13} \\ m\,a_{12} + n\,a_{22} + p\,a_{32} &= m\,a_{21} + n\,a_{22} + p\,a_{23} \\ m\,a_{13} + n\,a_{23} + p\,a_{33} &= m\,a_{31} + n\,a_{32} + p\,a_{33}, \end{aligned}\right. \tag{47}$$

und umgekehrt, wenn diese Bedingungen (47) erfüllt sind, so ist auch (43) erfüllt, d. h. l ist ein Doppelpunkt. Aus (47) folgt mit Rücksicht auf (31)

$$(48)\qquad \begin{cases} n(-p)+p(+n)=0 \\ m(+p)+p(-m)=0 \\ m(-n)+n(+m)=0. \end{cases}$$

Hieraus aber geht hervor, dass die Bedingungsgleichungen (47) tatsächlich erfüllt sind, dass also in der Tat l ein Doppelpunkt ist.

In analoger Weise lässt sich nachweisen, dass L eine Doppelgerade ist.

Es drängt sich nun sofort die Frage auf, ob wohl der Punkt l der Geraden L durch die Reciprocität zugeordnet ist und umgekehrt auch die Gerade L dem Punkte l. Da ich gezeigt habe, dass der Punkt l sowohl durch die Reciprocität r wie durch $\frac{a}{R}$ in dieselbe Gerade übergeführt wird, so brauche ich nur die eine Gleichung zu untersuchen; ich benutze (45) und muss nun nachweisen, dass die durch (45) dargestellte Gerade identisch oder wenigstens kongruent ist mit der Geraden L, dann besteht tatsächlich die reciproke Zuordnung. Ich betrachte zunächst den Koefficienten von E_1 in (45) und setze die Werte aus (31) ein und forme den so erhaltenen Ausdruck um

$$(49)\qquad \begin{aligned} &a_{11}(a_{23}-a_{32})+a_{21}(a_{31}-a_{13})+a_{31}(a_{12}-a_{21}) \\ &\qquad =\mathfrak{A}_{23}-\mathfrak{A}_{32}=m_1, \end{aligned}$$

d. h. der Koefficient von E_1 in (45) wird gleich dem Koefficienten von E_1 in der Gleichung der Geraden L. In ganz analoger Weise lässt sich nachweisen, dass auch die Koefficienten von E_2 und E_3 in den beiden Gleichungen gleich werden, d. h. dass die beiden Geraden identisch werden. Also ist tatsächlich die Gerade L dem Punkte l durch die Reciprocität zugeordnet, und zwar doppelt. Diese Beziehung besteht aber auch umgekehrt, wie sich durch ein analoges Verfahren leicht analytisch zeigen lässt, d. h. dass der Punkt l der Geraden L tatsächlich durch die Reciprocität zugeordnet ist, und zwar doppelt.

Aus diesen so gefundenen Eigenschaften des Doppelpunktes l und der Doppelgeraden L lässt sich nun noch ein weiterer Schluss ziehen. Da dem Punkte l die Gerade L durch die Reciprocität zugeordnet ist, da aber im allgemeinen, wie früher gezeigt wurde, der Punkt l nicht incident ist mit der Geraden L, so kann auch im allgemeinen l kein Punkt der Polkurve sein, denn diese ist ja definiert als der geometrische Ort für alle die Punkte, die auf ihren zugeordneten Geraden liegen, und l liegt nicht auf L. Andererseits kann aber auch L im allgemeinen keine Tangente der Polarkurve sein, denn diese ist ja der geometrische Ort für alle die Geraden, die durch ihre zugeordneten Punkte gehen, und L geht nicht durch l. Es liesse sich dies auch noch rein analytisch nachweisen, indem man die Werte von l und L bezüglich in die Gleichungen der Pol- und Polarkurve einsetzt.

Es ist noch von Wichtigkeit, dass die Existenz wie die Eigenschaften des Punktes l und der Geraden L abgeleitet sind ohne Rücksichtnahme auf die Existenz, Lage und Eigenschaften der beiden anderen Doppelpunkte resp. Doppelgeraden. Da ferner zu gleicher Zeit die Grössen m, n, p nicht verschwinden können, also auch nicht die Grössen m_1, n_1, p_1, weil dann ja, wie oben gezeigt wurde, der Spezialfall des Polarsystems vorliegen würde, so geht daraus hervor, dass der Doppelpunkt l wie die Gerade L stets reell sind, wie auch die beiden anderen Doppelelemente beschaffen sein werden. Es entsprechen also der Punkt l und die Gerade L der stets reellen Wurzel in den beiden kubischen Gleichungen (7) und (16).

Satz 18. „Unter den 3 Paaren von Doppelelementen in der Ebene der Pol- und Polarkurve ist das stets reelle Paar dargestellt durch die Gleichungen (33) und (37). Diese reellen Elemente, die im allgemeinen unter Ausschluss des Nullsystems und des speziellen Falles, wo eine Ecke des Fundamentaldreiecks auf der Polkurve gelegen ist, nicht incident sind, also auch nicht Elemente der Pol- resp. Polar-

kurve sein können, sind einander durch die Reciprocität doppelt zugeordnet."

Wenn nun die Pol- und Polarkurve eine doppelte Berührung haben, so sind die Berührungspunkte die beiden anderen Doppelpunkte und die Tangenten in diesen Punkten die zugeordneten Doppelgeraden. Da ich oben aber schon die Vermutung ausgesprochen habe, dass die Berührungssehne dann die 3. Doppelgerade sein wird, so nehme ich jetzt die Gerade L als diese und verwende sie zur weiteren Untersuchung der Gleichung (24). Wenn ich dann (24) als richtig nachweisen kann, dass also Pol- und Polarkurve eine doppelte Berührung haben, so habe ich damit zugleich bewiesen, dass L die Berührungssehne und dass diese — also die Berührungssehne — eine Doppelgerade ist. Ich muss in diesem Fall die Gleichung für L nicht in Linien- sondern in Punktkoordinaten nehmen. Um diese zu erhalten, bilde ich das äussere Produkt aus L und dem Punkte $(\mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3)$, also $(m_1 E_1 + n_1 E_2 + p_1 E_3)(\mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3)$ und bekomme L in der Form

$$L = m_1 \mathfrak{x}_1 + n_1 \mathfrak{x}_2 + p_1 \mathfrak{x}_3, \tag{50}$$

oder die Werte aus (35) eingesetzt

$$L = (\mathfrak{A}_{23} - \mathfrak{A}_{32}) \mathfrak{x}_1 + (\mathfrak{A}_{31} - \mathfrak{A}_{13}) \mathfrak{x}_2 + (\mathfrak{A}_{12} - \mathfrak{A}_{21}) \mathfrak{x}_3. \tag{51}$$

Da ich (24) als richtig nachweisen will für irgend einen Wert von g, so will ich $g = 1$ setzen, so dass die Gleichung bleibt

$$\Phi - L^2 = 0. \tag{52}$$

Es kommt zunächst darauf an, die Polarkurve in Punktkoordinaten auszudrücken. Dies geschieht dadurch, dass man aus der Gleichung der Polarkurve die Diskriminante in Determinantenform bildet und diese dann mit $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ rändert; das Resultat ist dann der gewünschte Ausdruck Φ.

Die Gleichung der Polarkurve in der entwickelten Form lautet

$$(53)\quad \begin{aligned}&\mathfrak{A}_{11}\,u_1{}^2+\mathfrak{A}_{22}\,u_2{}^2+\mathfrak{A}_{33}\,u_3{}^2+(\mathfrak{A}_{23}+\mathfrak{A}_{32})\,u_2\,u_3\\&+(\mathfrak{A}_{31}+\mathfrak{A}_{13})\,u_3\,u_1+(\mathfrak{A}_{12}+\mathfrak{A}_{21})\,u_1\,u_2=0.\end{aligned}$$

Um nun die Polarkurve in Punktkoordinaten zu erhalten, habe ich von (53) die Diskriminante in Determinantenform zu nehmen und dann diese Determinante mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 zu rändern. Dann bekomme ich die Polarkurve in der Form

$$(54)\quad \begin{vmatrix} 2\,\mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12}+\mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{31}+\mathfrak{A}_{13} & \xi_1\\ \mathfrak{A}_{21}+\mathfrak{A}_{12} & 2\,\mathfrak{A}_{22} & \mathfrak{A}_{23}+\mathfrak{A}_{32} & \xi_2\\ \mathfrak{A}_{31}+\mathfrak{A}_{13} & \mathfrak{A}_{23}+\mathfrak{A}_{32} & 2\,\mathfrak{A}_{33} & \xi_3\\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 = \Phi,$$

oder nach ξ_1, ξ_2, ξ_3 entwickelt und zusammengefasst

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned}&\xi_1{}^2\left\{(\mathfrak{A}_{23}+\mathfrak{A}_{32})^2-4\,\mathfrak{A}_{22}\,\mathfrak{A}_{33}\right\}\\&+\xi_2\,\xi_3\cdot 2\left\{2\,\mathfrak{A}_{11}\,(\mathfrak{A}_{23}+\mathfrak{A}_{32})-(\mathfrak{A}_{12}+\mathfrak{A}_{21})\,(\mathfrak{A}_{31}+\mathfrak{A}_{13})\right\}\\&+\xi_2{}^2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\qquad +\xi_3\,\xi_1\,.\,.\,.\,.\\&+\xi_3{}^2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\qquad +\xi_1\,\xi_2\,.\,.\,.\,.\end{aligned}\right\}=0.$$

(55) ist also die gesuchte Gleichung der Polarkurve in Punktkoordinaten, d. h. die linke Seite von (55) ist der Ausdruck Φ. Hiervon habe ich nach (52) L^2 abzuziehen, weshalb ich zunächst L^2 bilde. Aus (51) folgt durch Quadrieren und Auswerten

$$(56)\quad L^2=\left\{\begin{aligned}&\xi_1{}^2\left\{\mathfrak{A}_{23}{}^2+\mathfrak{A}_{32}{}^2-2\,\mathfrak{A}_{23}\,\mathfrak{A}_{32}\right\}\\&+2\,\xi_2\,\xi_3\left\{\mathfrak{A}_{31}\,\mathfrak{A}_{12}-\mathfrak{A}_{13}\,\mathfrak{A}_{12}-\mathfrak{A}_{31}\,\mathfrak{A}_{21}+\mathfrak{A}_{13}\,\mathfrak{A}_{21}\right\}\\&+\xi_2{}^2\,.\,.\,.\,.\,.\qquad +2\,\xi_3\,\xi_1\,.\,.\,.\,.\,.\\&+\xi_3{}^2\,.\,.\,.\,.\,.\qquad +2\,\xi_1\,\xi_2\,.\,.\,.\,.\,.\end{aligned}\right.$$

Jetzt habe ich die Differenz $\Phi - L^2$ zu bilden. Zu dem Zwecke beachte ich, dass sowohl in (55) wie in (56) die 3 Gruppen von Gliedern ganz symmetrisch durch cyklische

Vertauschung der Indices gebildet sind. Indem ich nun die erste Gliedergruppe in (56) von der in (55) subtrahiere, erhalte ich als Faktor von ξ_1^2

$$4\,(\mathfrak{A}_{23}\,\mathfrak{A}_{32} - \mathfrak{A}_{22}\,\mathfrak{A}_{33}) \tag{57}$$

und als Faktor von $2\,\xi_2\,\xi_3$

$$2\left\{\mathfrak{A}_{11}\,(\mathfrak{A}_{23} + \mathfrak{A}_{32}) - \mathfrak{A}_{12}\,\mathfrak{A}_{31} - \mathfrak{A}_{21}\,\mathfrak{A}_{13}\right\}. \tag{58}$$

Mithin lautet die ganze gesuchte Differenz

$$\Phi - \mathrm{L}^2 = \left\{\begin{array}{ll} \xi_1^2\,(\mathfrak{A}_{23}\,\mathfrak{A}_{32} - \mathfrak{A}_{22}\,\mathfrak{A}_{33}) & \\ \quad + \xi_2\,\xi_3\left\{\mathfrak{A}_{11}\,(\mathfrak{A}_{23} + \mathfrak{A}_{32}) - \mathfrak{A}_{12}\,\mathfrak{A}_{31} - \mathfrak{A}_{21}\,\mathfrak{A}_{13}\right\} & \\ + \xi_2^2\,\ldots\ldots & + \xi_3\,\xi_1\,\ldots\ldots \\ + \xi_3^2\,\ldots\ldots & + \xi_1\,\xi_2\,\ldots\ldots \end{array}\right\} \cdot 4. \tag{59}$$

Es handelt sich nun darum, zu untersuchen, ob in der rechten Seite von (59) der Ausdruck für die Polkurve enthalten ist. Um dies untersuchen zu können, muss ich zunächst die Gleichung der Polkurve nach Punktkoordinaten entwickeln. Diese ist

$$\begin{aligned} &a_{11}\,\xi_1^2 + a_{22}\,\xi_2^2 + a_{33}\,\xi_3^2 \\ &+ (a_{23} + a_{32})\,\xi_2\,\xi_3 + (a_{31} + a_{13})\,\xi_3\,\xi_1 + (a_{12} + a_{21})\,\xi_1\,\xi_2 = 0, \end{aligned} \tag{60}$$

deren linke Seite ich mit φ bezeichnen will. Da es sich um die Frage handelt, ob φ als Faktor in dem Ausdruck $(\Phi - \mathrm{L}^2)$ enthalten ist, und da ich erkenne, dass die beiden Ausdrücke wieder ganz symmetrisch gebildet sind, so nehme ich die Division nur vor mit den Koefficienten von ξ_1^2 und ξ_2, ξ_3, die übrigen Quotienten kann ich dann wieder durch cyklische Vertauschung der Indices bilden. Da ferner φ als Faktor enthalten sein soll, so kommt es auf den Zahlfaktor 4 nicht an, ich kann diesen also überhaupt unberücksichtigt lassen. Für den Koefficienten von ξ_1^2 forme ich zunächst den Ausdruck $(\mathfrak{A}_{23}\,\mathfrak{A}_{32} - \mathfrak{A}_{22}\,\mathfrak{A}_{33})$ um und erhalte

$$(\mathfrak{A}_{23}\,\mathfrak{A}_{32} - \mathfrak{A}_{22}\,\mathfrak{A}_{33}) = -\,\mathfrak{a}\,a_{11}, \tag{61}$$

welchen ich jetzt durch a_{11} zu dividieren habe; es bleibt also $(-a)$ übrig. Dasselbe Resultat erhalte ich bei der Division der Glieder mit x_2^2 und x_3^2. Nun forme ich den Ausdruck $\mathfrak{A}_{11}(\mathfrak{A}_{23}+\mathfrak{A}_{32})-\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{31}-\mathfrak{A}_{21}\mathfrak{A}_{13}$ um und erhalte

$$(62)\qquad \mathfrak{A}_{11}(\mathfrak{A}_{23}+\mathfrak{A}_{32})-\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{31}-\mathfrak{A}_{21}\mathfrak{A}_{13}=-a(a_{23}+a_{32}),$$

welchen ich jetzt durch $(a_{23}+a_{32})$ zu dividieren habe; es bleibt also auch hier $(-a)$ übrig. Dasselbe Resultat erhalte ich auch bei der Division der Glieder mit $x_3 x_1$ und mit $x_1 x_2$. Wenn ich das alles zusammenfasse, folgt also aus (59) infolge der Division durch φ

$$(63)\qquad \frac{\Phi-L^2}{\varphi}=-4a$$

oder

$$(64)\qquad \Phi-L^2=-4a\varphi.$$

Da $(-4a)$ nur die Bedeutung eines Zahlfaktors hat, so ist es tatsächlich gelungen, den Ausdruck $\Phi-g\,L^2$, wobei $g=1$ gesetzt wurde, in die Polkurve überzuführen, und infolgedessen haben Pol- und Polarkurve eine reelle oder imaginaere doppelte Berührung. Zugleich ist dadurch auch bewiesen, dass L die Berührungssehne der beiden Kurven ist, dass also die Berührungssehne tatsächlich eine Doppelgerade ist. Die beiden anderen Doppelgeraden sind die in den Berührungspunkten gezogenen Tangenten, die Berührungspunkte sind zwei Doppelpunkte.

Satz 19. „In einer beliebigen Reciprocität haben die beiden Ordnungskurven eine doppelte reelle oder imaginaere Berührung, und die Berührungssehne ist die dritte in der Ebene vorhandene, stets reelle Doppelgerade.“

Habe ich etwa den speziellen Fall, wo die Pol- und Polarkurve koncentrische, ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte sind, so kann ich sie als zwei solche Kegelschnitte ansehen, die sich auf der unendlich fernen Geraden berühren. Auch hier kann ich eine reelle und imaginaere doppelte Be-

rührung unterscheiden; die doppelte Berührung ist nämlich reell, wenn die Ordnungskurven 2 Hyperbeln sind, dagegen imaginaer, wenn die Ordnungskurven 2 Ellipsen sind.

Nachdem so die Lage von Pol- und Polarkurve ermittelt ist, will ich jetzt noch auf eine andere Zuordnung von reciproken Elementen der beiden Kurven eingehen. Es war ja gefunden, dass jedem Punkte der Polkurve 2 durch ihn gehende Tangenten der Polarkurve zugeordnet sind, und umgekehrt, jeder Tangente der Polarkurve 2 auf dieser liegende Punkte der Polkurve. Wie ist es nun aber mit den Punkten der Polarkurve und den Tangenten der Polkurve? In der jetzt folgenden Untersuchung will ich von vornherein die Doppelpunkte und Doppelgeraden ausschalten, da ich diese ja schon eingehend betrachtet habe. x und y seien 2 Punkte der Polkurve, denen durch die Reciprocitäten r und $\frac{a}{R}$ die Stäbe U_1 und U_2, V_1 und V_2 zugeordnet sind, und zwar ist

$$(65) \qquad xr = U_1,\ x\frac{a}{R} = U_2$$

$$(66) \qquad yr = V_1,\ y\frac{a}{R} = V_2.$$

Dass diese und nur diese Zuordnung möglich ist, wird im nächsten Abschnitt ausführlich dargelegt werden. Wenn also dem Punkte x vorwärts der Stab U_1 zugeordnet ist, und andererseits dem Punkte y der Stab V_1 auch vorwärts, so ist doch auch der Verbindungslinie von x und y, also der Geraden [xy] der Schnittpunkt der Stäbe U_1 und V_1, also der Punkt $[U_1\, V_1]$ zugeordnet. Bewegt sich nun der Punkt y auf der Polkurve so, dass er immer näher an den Punkt x heranrückt, so bewegt sich auch der Stab U_1, und zwar so, dass der Punkt $[U_1\, V_1]$ immer näher an den Berührungspunkt von U_1 mit der Polkurve heranrückt. Im Grenzfalle, wo x mit y zusammenfällt, wird [xy] eine Tangente der Polkurve. Dann fällt auch V_1 mit U_1

zusammen, und der Punkt $[U_1 V_1]$ fällt in den Berührungspunkt von U_1 mit der Polarkurve. Doch sieht man zugleich, dass der der Tangente [xy] der Polkurve zugeordnete Punkt $[U_1 V_1]$ zwar auf der Polarkurve liegt, aber nicht mehr auf der Geraden [xy], d. h. die zugeordneten Elemente sind nicht mehr incident, was von vornherein schon aus der Lage von Pol- und Polarkurve ersichtlich war, da ja die Polkurve die Polarkurve umschliesst. Der andere der Tangente [xy] zugeordnete Punkt ist $[U_2 V_2]$, von dem ich dasselbe beweisen kann wie von $[U_1 V_1]$; auch er liegt also auf der Polarkurve.

Satz 20. „Durch die allgemeine Reciprocität werden jeder Tangente der Polkurve 2 Punkte der Polarkurve zugeordnet, doch liegen diese mit Ausnahme der beiden hierbei in Frage kommenden Doppelelemente nicht mehr auf der Tangente der Polkurve."

In analoger Weise lässt sich das dualistisch entsprechende Resultat ableiten.

Satz 21. „Durch die allgemeine Reciprocität werden jedem Punkte der Polarkurve 2 Tangenten der Polkurve zugeordnet, doch gehen diese mit Ausnahme der beiden hierbei in Frage kommenden Doppelelemente nicht mehr durch den betreffenden Punkt der Polarkurve."

Abschnitt VI.

Konstruktion von zugeordneten Elementen, Konstruktion der Pol- resp. Polarkurve und daraus folgende Ergebnisse betreffs der Gestalt von Pol- und Polarkurve.

Aufgabe 1. Gegeben ist ein beliebiger Punkt x. Gesucht sind die beiden Geraden, in die der Punkt x in Bezug auf die Pol- und Polarkurve übergeht durch die Reciprocitäten r und $\frac{a}{R}$.

Fall 1. Fig. 1.

Der Punkt x liege ausserhalb der beiden Kurven, dann verfahre ich folgendermassen: Von x aus ziehe ich die beiden Tangenten V und W an die Polarkurve, welche die Polkurve in den Punkten y und y_1, z und z_1 treffen. Diese Tangenten sind immer möglich, da der Punkt x ausserhalb der Polarkurve liegen soll. Ich verbinde jetzt y mit z und y_1 mit z_1 und setze

(1) $$[y\,z] = U \text{ und } [y_1\,z_1] = U_1,$$

dann sind U und U_1 die beiden dem Punkte x zugeordneten Geraden, d. h. es ist

(2) $$xr = U \text{ und } x\frac{a}{R} = U_1,$$

d. h. U entspricht dem Punkte x vorwärts, U_1 dagegen rückwärts. x, y und y_1 liegen auf einer Geraden, also müssen die diesen 3 Punkten zugeordneten Geraden durch einen Punkt gehen. Dieser Punkt muss y resp. y_1 sein, denn y und y_1 sind Punkte der Polkurve, und die diesen Punkten zugeordneten Geraden müssen durch sie selbst hindurchgehen nach der Definition der Polkurve. x, z z_1 liegen auf einer Geraden, also müssen wieder die diesen 3 Punkten zugeordneten Geraden durch einen Punkt gehen, und dieser ist z oder z_1 aus demselben Grunde wie eben y resp. y_1. Also sind die Verbindungslinien von je 2 entsprechenden der 4 Punkte y, y_1, z, z_1 dem Punkte x zugeordnet, und das sind [y z] und $[y_1\,z_1]$.

Fall 2.

Der Punkt x liege innerhalb der Polkurve aber noch ausserhalb der Polarkurve, dann ist Konstruktion und Beweis genau wie Fall 1.

Fall 3.

Der Punkt x liege gerade auf der Polarkurve; dann kann ich durch ihn nur eine Tangente an die Polarkurve

ziehen, es fallen dann auch die Punkte y und z einerseits und die Punkte y_1 und z_1 andererseits zusammen, und es sind dem Punkte x durch die Reciprocität dann die beiden Tangenten zugeordnet, die ich in den Schnittpunkten der durch x gelegten Polarkurventangente mit der Polkurve an die letztere ziehen kann, denn diese Tangenten sind die Grenzfälle der früheren zugeordneten Sekanten. Es entspricht dies auch dem Satze 21.

Fall 4.

Der Punkt x liege innerhalb der Polarkurve, dann werden die ihm durch die Reciprocität zugeordneten Geraden imaginaer, da von ihm aus sich keine reellen Tangenten mehr an die Polarkurve ziehen lassen.

Es bleibt noch zu erörtern, wie die Schnittpunkte als gegenseitig sich entsprechende zu wählen sind, damit ich die richtigen Verbindungslinien ziehe, also die dem Punkte x zugeordneten Geraden erhalte. Wenn ich berücksichtige, dass die Polarkurve doch eine Kurve 2. Klasse ist, dass sie also hervorgerufen wird durch sie einhüllende Tangenten, so werde ich offenbar diejenigen als entsprechende zu wählen haben, die bei dem Aufeinanderfallen der beiden Tangenten auch zusammenfallen, wenn ich die eine Tangente an der Polarkurve entlanggleiten lasse.

Satz 22. „Jedem beliebigen Punkte werden in Bezug auf die Pol- und Polarkurve durch die Reciprocität im allgemeinen 2 Gerade zugeordnet, die jedoch imaginaer werden, wenn der Punkt in die Polarkurve hineinfällt."

Aufgabe 2. Gegeben ist die beliebige Gerade U, gesucht sind in Bezug auf die Pol- und Polarkurve die beiden Punkte, in die die Gerade durch die Reciprocität R und $\frac{a}{r}$ übergeht.

Fall 1. Fig. 2.

Die Gerade U sei eine Sekante der Polkurve, treffe aber die Polarkurve nicht. Schneidet U die Polkurve in den

Punkten y und z, so ziehe ich von y an die Polarkurve die Tangenten V und V_1 und von z die Tangenten W und W_1. Dann schneiden sich V und W in [V W] und V_1 und W_1 in [V_1 W_1], und setze ich nun

$$[V\,W] = x \text{ und } [V_1\,W_1] = x_1, \tag{3}$$

dann sind x und x_1 die beiden der Geraden U zugeordneten Punkte, d. h. es ist

$$UR = x \text{ und } U\frac{a}{r} = x_1, \tag{4}$$

d.h. x entspricht der Geraden U vorwärts, x_1 dagegen rückwärts. Dem Punkte y sind zugeordnet die Geraden V und V_1, dem Punkte z die Geraden W und W_1, also sind der Verbindungslinie von y und z die Schnittpunkte je zweier entsprechender Geraden von V, V_1, W, W_1 zugeordnet, das sind aber [V W] und [V_1 W_1].

Es handelt sich noch darum, wie die gegenseitig sich entsprechenden Tangenten zu wählen sind, damit man die richtigen Schnittpunkte, also die dem Stabe U zugeordneten Punkte erhält. Wenn ich wieder berücksichtige, dass die Polarkurve durch eine sich bewegende Tangente eingehüllt wird, so werde ich die beiden Tangenten als entsprechende zu wählen haben, die auf einander fallen würden, falls ich den einen der beiden Punkte y und z sich so auf der Polkurve bewegen liesse, bis er schliesslich in den anderen fiele.

Fall 2. Fig. 3.

Die Gerade U sei eine Sekante der Polarkurve, nicht aber gerade die Berührungssehne, und sei so kurz, dass sie die Polkurve nicht mehr trifft. Ist die Verlängerung von U bis zu den Schnittpunkten mit der Polkurve noch möglich, so habe ich wieder den Fall 1, ist eine solche Verlängerung jedoch nicht möglich, so habe ich folgendermassen zu verfahren. Seien y und z die Schnittpunkte der Geraden U mit

der Polarkurve, so ziehe ich in diesen Punkten an die Polarkurve die Tangenten V und W, die die Polkurve bezüglich in den Punkten y_1 und y_2, z_1 und z_2 schneiden. Ziehe ich nun wieder in diesen letzteren Punkten an die Polkurve die Tangenten V_1 und V_2, W_1 und W_2, die sich in den Punkten $[V_1 W_1]$ und $[V_2 W_2]$ schneiden, und setze ich

$$[V_1 W_1] = x_1 \text{ und } [V_2 W_2] = x_2, \tag{5}$$

dann sind x_1 und x_2 die beiden der Geraden U zugeordneten Punkte, d. h. es ist

$$UR = x_1 \text{ und } U\frac{a}{r} = x_2, \tag{6}$$

d. h. x_1 entspricht der Geraden U vorwärts, x_2 dagegen rückwärts. Nach Aufgabe 1 Fall 3 sind dem Punkte y die Geraden V_1 und V_2, dem Punkte z die Geraden W_1 und W_2 zugeordnet; also sind der Verbindungslinie von y und z die Schnittpunkte von V_1 und W_1, resp. von V_2 und W_2 zugeordnet. Die Wahl der entsprechenden Elemente geschieht genau nach der obigen Angabe.

Fall 3.

Die Gerade U treffe weder die Pol- noch die Polarkurve in einem reellen Punkte. Dann nehme ich auf der Geraden U 2 beliebige Punkte y und z an und konstruiere nach Aufgabe 1 Fall 1 die ihnen zugeordneten Geraden. Die Schnittpunkte je zweier den Punkten y und z entsprechenden Geraden sind dann die der Geraden U vor- resp. rückwärts zugeordneten Punkte. Dieses Verfahren kann man auch anwenden, wenn die Gerade U wohl die Polarkurve trifft, nicht aber die Polkurve, wenn es jedoch noch möglich ist, sie über die Polarkurve hinaus zu verlängern. Ich nehme dann nur die Punkte y und z auf U etwas ausserhalb der Polkurve an.

Fall 4.

Die Gerade U sei Tangente der Polkurve. Den Fall, wo U Tangente der Polarkurve ist, habe ich von vornherein ausgeschlossen, da dieses früher ausführlich behandelt ist, wie ich auch in Aufgabe 1 den Fall übergangen habe, dass der Punkt x gerade auf die Polkurve fällt. Tritt also der Fall ein, dass U Tangente der Polkurve wird, so fallen in Fig. 2 offenbar die Geraden V und W wie die Geraden V_1 und W_1 zusammen. Der Geraden U sind dann durch die Reciprocität die beiden Punkte zugeordnet, in denen die von dem Berührungspunkte der Geraden U mit der Polkurve an die Polarkurve gezogenen beiden Tangenten die Polarkurve berühren. Dies entspricht wieder dem Satze 20.

Fall 5.

Jetzt werde U gerade die Berührungssehne der beiden Kurven. Dieser Fall hat auch ein Analogon in der Aufgabe 1, wie sich aus dieser Betrachtung ergeben wird, doch habe ich es dort fortgelassen, weil es hier deutlicher zu Tage tritt. Ich kann in diesem Falle die Konstruktion von Fall 1 oder 2 anwenden, beide Male werde ich zu demselben Resultat kommen. Verfahre ich nach Fall 2, so fallen jetzt offenbar V, V_1 und V_2, W, W_1 und W_2 zusammen, und der Schnittpunkt von V und W, also [V W] wird der der Geraden U durch die Reciprocität zugeordnete Punkt x sein. Setze ich also

$$[V\,W] = x, \tag{7}$$

dann ist x der der Geraden U vor- und rückwärts zugeordnete Punkt, d. h. es ist

$$UR = U\frac{a}{r} = x. \tag{8}$$

Also ist der Punkt x ein Doppelpunkt, d. h. ein Punkt, der der Geraden U sowohl vor- wie rückwärts entspricht. Andererseits geht aus dem Zusammenfallen von V_1 mit V_2

und W_1 mit W_2 hervor, dass 2 Doppelgerade da sind, die sich schon früher bei der Betrachtung der Lage von Pol- und Polarkurve zu einander ergeben hatten. Dasselbe lässt sich natürlich auch umkehren — das gehört eigentlich in die Aufgabe 1 —, dass dem Punkte $[VW] = x$ in Bezug auf beide Kurven vorwärts und rückwärts nur die eine Gerade U zugeordnet ist, welche die Berührungssehne der beiden Kurven ist. Dies erkennt man auch sofort daraus, wenn man für diesen bestimmten Punkt x die Konstruktion von Fig. 1 anwendet. Da die Berührungssehne Sehne in beiden Kurven ist, so kann ich sie in Bezug auf jeden Kegelschnitt als Polare des Punktes x bezeichnen, ebenso kann ich die beiden anderen Paare von Doppelelementen als Pol und Polare sowohl in Bezug auf die Pol- wie auf die Polarkurve ansehen, dann erhalte ich, wenn ich dies berücksichtige und bedenke, dass man solche Elemente als involutorisch entsprechende bezeichnet, den

Satz 23. „In einer beliebigen Reciprocität, in der Pol- und Polarkurve im allgemeinen eine doppelte Berührung haben und in deren Ebene es im allgemeinen 3 Paare von Doppelelementen gibt, sind 2 von den Doppelpunkten die Berührungspunkte der beiden Kurven mit einander, 2 von den Doppelgeraden die gemeinsamen Tangenten in diesen Punkten. Der 3. stets reelle Doppelpunkt, der im allgemeinen ausserhalb der Kurven liegt, ist der in Bezug auf jeden der beiden Kegelschnitte der Berührungssehne zugeordnete harmonische Pol, wie umgekehrt die Berührungssehne, die die 3. stets reelle Doppelgerade ist, die dem Punkte zugeordnete harmonische Polare. Ebenso sind die beiden anderen Doppelpunkte die Pole der durch sie gehenden Doppelgeraden wie umgekehrt auch diese die Polaren zu jenen. Die 3 Paare von Doppelelementen sind also die involutorisch zugeordneten Elementenpaare der Ebene."

Mit Hülfe dieser Aufgabe 2 lässt sich nun auch noch der Fall 4 der Aufgabe 1 lösen, der nach den bisherigen Methoden nicht lösbar war und wobei sich die dem gegebenen

Punkte zugeordneten Geraden als imaginaer ergaben. Liegt der gegebene Punkt also innerhalb der Polarkurve, so kann ich ihn als Schnittpunkt von 2 beliebigen Geraden ansehen, deren zugeordnete Punkte ich nach Aufgabe 2 konstruiere. Verbinde ich dann je 2 entsprechende Punkte mit einander, so ist jede der beiden Verbindungslinien dem gegebenen Punkte bezüglich vorwärts oder rückwärts zugeordnet.

Hieran schliesst sich nun die allgemeinere Aufgabe von der Konstruktion der Pol- resp. der Polarkurve.

Aufgabe 3 (Fig. 4). Gegeben sind 4 Punkte x_1, x_2, x_3, x_4, von denen nicht 3 in einer Geraden liegen, und die ihnen durch die Reciprocität vorwärts zugeordneten Geraden U_1, U_2, U_3, U_4, von denen sich also auch nicht 3 in einem Punkte schneiden. Es soll die einem 5. Punkte x_5 zugeordnete Gerade U_5 konstruiert werden, wobei noch vorausgesetzt sei, dass die 5 Punkte x_1, x_2 . . . x_5 auf der Polkurve liegen, dass also die ihnen zugeordneten Geraden durch sie selbst hindurchgehen sollen.

Anm. Es ist hier davon Abstand genommen, die beiden einem Punkte zugeordneten Geraden zu berücksichtigen, um die Fig. nicht zu kompliziert zu gestalten. Natürlich muss bei den gegebenen Grössen darauf Rücksicht genommen werden, dass die den Punkten zugeordneten Geraden entweder alle ihnen vorwärts oder alle ihnen rückwärts entsprechen; demgemäss werde ich auch für den 5. Punkt die demselben vorwärts resp. rückwärts zugeordnete Gerade erhalten. Durch Wiederholung der Konstruktion findet man auch die andere Gerade.

Ich verbinde x_1 mit x_2 und x_3 mit x_4, so erhalte ich den Punkt z_1; andererseits verbinde ich x_1 mit x_4 und x_2 mit x_3, so erhalte ich den Punkt z_2. Ausserdem bezeichne ich mit y_1 den Schnittpunkt von U_1 und U_2 und entsprechend $y_2 = [U_2\, U_3]$, $y_3 = [U_3\, U_4]$, $y_4 = [U_4\, U_1]$ und verbinde dann y_1 mit y_3 und y_2 mit y_4. Aus der bisherigen Konstruktion geht hervor, dass $[y_1\, y_3]$ die dem Punkte z_1, $[y_2\, y_4]$ die dem Punkte z_2 zugeordnete Gerade ist, denn es ist ja y_1 als

Schnittpunkt der den Punkten x_1 und x_2 zugeordneten Geraden U_1 und U_2 zugleich der der Geraden $[x_1 x_2]$ zugeordnete Punkt. Dasselbe gilt für den Punkt y_3 in Bezug auf die Gerade $[x_3 x_4]$. Es ist also auch dem Schnittpunkt von $[x_1 x_2]$ und $[x_3 x_4]$ die Verbindungslinie von y_1 und y_3 zugeordnet. Entsprechendes gilt für den Punkt z_2 als Schnittpunkt von $[x_2 x_3]$ und $[x_1 x_4]$ und der Verbindungslinie von y_2 und y_4. Jetzt verbinde ich z_1 mit dem noch gegebenen Punkte x_5 und erhalte auf $[x_1 x_4]$ den Punkt v, andererseits erhalte ich durch Verbinden von z_2 mit x_5 auf $[x_1 x_2]$ den Punkt w. Es kommt nun darauf an, die den Punkten v und w durch die Reciprocität zugeordneten Geraden V und W zu ermitteln. Die Ergebnisse der Aufgabe 1 kann ich hier nicht verwenden, da ich die Polarkurve noch nicht habe. Ich kann aber nach den Ergebnissen der synthetischen Geometrie die Geraden V und W finden, wenn ich bedenke, dass die Punkte x_1, x_2, z_1, w in einer Geraden liegen und dass die den ersten 3 von diesen Punkten zugeordneten Geraden U_1, U_2, $[y_1 y_3]$, die alle 3 durch denselben Punkt y_1 gehen müssen, mir bekannt sind. Die dem Punkte w zugeordnete Gerade W möge nun $[y_2 y_4)$ in p schneiden. Andererseits weiss ich, dass die Punkte x_1, x_4, z_2, v in einer Geraden liegen und dass die den ersten 3 von diesen Punkten zugeordneten Geraden U_1, U_4, $[y_2 y_4]$, die durch den einen Punkt y_4 gehen müssen, mir bekannt sind. Es muss nun auch die dem Punkte v zugeordnete Gerade V durch y_4 gehen und möge $[y_1 y_3]$ in q treffen. Dann ist p als Durchschnitt der den beiden Punkten w und z_2 zugeordneten Geraden zugleich der der Geraden $[w z_2]$, die durch x_5 geht, zugeordnete Punkt. Andererseits ist der Punkt q als Durchschnitt der den beiden Punkten z_1 und v zugeordneten Geraden zugleich auch der der Geraden $[z_1 v]$, die durch x_5 geht, zugeordnete Punkt. Somit ist dem Schnittpunkt von $[w z_2]$ und $[v z_1]$ die Verbindungslinie von p und q zugeordnet, d. h. $[p q]$ ist die dem Punkte x_5 zugeordnete Gerade. Lege ich nun durch die 5 Punkte x_1, $x_2 \ldots x_5$, von denen nicht 3 in einer Geraden liegen

sollten, die durch sie eindeutig bestimmte Kurve 2. Ordnung, die Polkurve, so werden die diesen Punkten zugeordneten Geraden eine 2. Kurve, die Polarkurve, umhüllen, und [p q] wird durch x_5 gehen. Da nun eine Kurve 2. Grades durch 5 Punkte, von denen nicht 3 in gerader Linie liegen, vollständig und eindeutig bestimmt ist, so erhalte ich den

Satz 24. „Um zu einer gegebenen Polkurve die Polarkurve zu konstruieren, kann ich auf derselben 4 Punkte und ihre durch sie selbst gehenden zugeordneten Geraden beliebig annehmen, die jedem weiteren Punkte der Polkurve zugeordnete Gerade der Polarkurve ist dann vollkommen und eindeutig bestimmt."

Aufgabe 4 (Fig. 4). Gegeben sind 4 Gerade U_1, U_2, U_3, U_4, von denen sich nicht 3 in einem Punkte schneiden, und die diesen Geraden durch die Reciprocität zugeordneten Punkte x_1, x_2, x_3, x_4, von denen also auch nicht 3 in einer Geraden liegen. Es soll der einer 5. Geraden U_5 zugeordnete Punkt x_5 konstruiert werden, wobei noch vorausgesetzt ist, dass die 5 Geraden U_1, U_2 . . . U_5 Tangenten der Polarkurve sind.

Zunächst verbinde ich wieder x_1 mit x_2 und x_3 mit x_4, um den Punkt z_1 zu erhalten, und x_1 mit x_4 und x_2 mit x_3, um z_2 zu erhalten. Ich bezeichne dann wieder den Schnittpunkt von U_1 und U_2 mit y_1 und entsprechend $y_2 = [U_2\, U_3]$, $y_3 = [U_3\, U_4]$, $y_4 = [U_4\, U_1]$ und verbinde y_1 mit y_3 und y_2 mit y_4. Dann ist wieder die Gerade $[y_1\, y_3]$ dem Schnittpunkt von $[x_1\, x_2]$ und $[x_3\, x_4]$, also dem Punkt z_1 zugeordnet, und die Gerade $[y_2\, y_4]$ dem Schnittpunkte von $[x_2\, x_3]$ und $[x_1\, x_4]$, also dem Punkte z_2. Nun trifft aber die noch gegebene Gerade U_5 die Gerade $[y_1\, y_3]$ in q und die Gerade $[y_2\, y_4]$ in p. Es kommt dann darauf an, die den Geraden $[y_1\, p]$ und $[y_4\, q]$ zugeordneten Punkte zu ermitteln. Die Ergebnisse der Aufgabe 2 kann ich hier nicht verwenden, da ich die Polkurve noch nicht kenne. Es ist aber dieser zugeordnete Punkt zu finden, wenn ich bedenke, dass

die Geraden $[y_1 y_4]$, $[y_1 y_2]$, $[y_1 y_3]$, $[y_1 p]$ sich in dem einen Punkte y_1 schneiden, und dass die den ersten 3 von diesen Geraden zugeordneten Punkte x_1, x_2, z_1, die alle auf derselben Geraden liegen, mir bekannt sind. Der der Geraden $[y_1 p]$ zugeordnete Punkt, der offenbar auch auf dieser Geraden liegen muss, mag w sein. Andererseits weiss ich auch, dass die Geraden $[y_4 y_1]$, $[y_4 y_3]$, $[y_4 y_2]$, $[y_4 q]$ alle durch denselben Punkt y_4 gehen, und dass die den 3 ersten von diesen Geraden zugeordneten Punkte x_1, x_4, z_2, die auf derselben Geraden liegen müssen, mir bekannt sind. Es muss nun auch der der Geraden $[y_4 q]$ zugeordnete Punkt v auf dieser Geraden liegen. Ich verbinde jetzt z_1 mit v und z_2 mit w, dann ist der Schnittpunkt von $[z_1 v]$ und $[z_2 w]$ der gesuchte der Geraden U_5 zugeordnete Punkt x_5. Da w der der Geraden $[y_1 p]$ zugeordnete Punkt und z_2 der der Geraden $[y_2 y_4]$ zugeordnete ist, so ist $[z_2 w]$ die dem Punkte p zugeordnete Gerade. Da ferner v der der Geraden $[y_4 q]$ zugeordnete Punkt ist und z_1 der der Geraden $[y_1 y_3]$ zugeordnete, so ist $[z_1 v]$ die dem Punkte q zugeordnete Gerade. Nun schneiden sich aber $[z_2 w]$ und $[z_1 v]$ im Punkte x_5. Da jede von diesen beiden Geraden dem Punkte p oder q zugeordnet ist, so ist auch der Punkt x_5 der Geraden $[p q]$, das ist also der Geraden U_5 zugeordnet. x_5 muss auch auf U_5 liegen, denn es war vorausgesetzt, dass U_5 eine Tangente der Polarkurve sein sollte. Beschreibe ich nun den 5 Geraden U_1, U_2 . . . U_5, von denen nicht 3 durch denselben Punkt gehen, die durch diese eindeutig bestimmte Kurve 2. Klasse, die Polarkurve an, so werden die diesen Geraden zugeordneten Punkte eine 2. Kurve, die Polkurve beschreiben, und x_5 wird auf U_5 liegen. Da nun eine Kurve 2. Grades durch 5 Punkte, von denen nicht 3 in einer Geraden liegen, resp. durch 5 Tangenten, von denen nicht 3 durch einen Punkt gehen, vollständig und eindeutig bestimmt ist, so erhalte ich den

Satz 25. „Um zu einer gegebenen Polarkurve die Polkurve zu konstruieren, kann ich an derselben 4 Tangenten

und die auf ihnen liegenden zugeordneten Punkte beliebig annehmen, der jeder weiteren Tangente der Polarkurve zugeordnete Punkt der Polkurve ist dann aber vollkommen und eindeutig bestimmt.“

Es sollen jetzt noch unendlich ferne Elemente mit in die Betrachtung hineingezogen werden, da man mit ihrer Hülfe eine wichtige Eigenschaft der Polarkurve kennen lernen wird, die man nicht ohne weiteres vermuten kann. Zunächst will ich voraussetzen, dass die Doppelberührung zwischen Pol- und Polarkurve reell sei. Ist ein unendlich ferner Punkt gegeben, so wende ich die Konstruktion der Fig. 1 an, dann sind die von dem unendlich fernen Punkte an die Polarkurve gezogenen Tangenten parallel, doch erhalte ich 2 reelle, dem unendlich fernen Punkte zugeordnete Gerade. Hierbei muss noch die Einschränkung gemacht werden, dass zwischen den parallelen Tangenten kein reeller Berührungspunkt der beiden Tangenten liegen darf; nur in dem Falle darf ich die Zuordnung so nehmen, wie sie Fig. 1 angibt, wie sie überhaupt für alle Aufgaben verwendet ist.

Ist andererseits eine unendlich ferne Gerade gegeben, so wende ich die Konstruktion der Aufgabe 2 Fall 3 an und erhalte 2 reelle, der unendlich fernen Geraden zugeordnete Punkte, wenn ich wieder dieselbe Voraussetzung mache wie im vorigen Falle. Sind mir mehrere einander parallele Gerade gegeben, so kann ich diese offenbar so ansehen, als ob sie sich in dem in ihrer Richtung liegenden unendlich fernen Punkte schnitten. Folglich müssen die diesen Geraden zugeordneten Punkte auch auf 2 Geraden liegen, nämlich auf den beiden Geraden, die ihrem unendlich fernen Schnittpunkte durch die Reciprocität zugeordnet sind. Suche ich ausserdem noch die beiden Geraden, auf denen die zugeordneten Punkte von Geraden liegen, die nach einer anderen Richtung hin parallel sind, so erhalte ich 2 Schnittpunkte, die der Verbindungslinie der beiden unendlich fernen Punkte, also der unendlich fernen Geraden zugeordnet sind. So habe ich von einem anderen Ausgangspunkte ausgehend auch die zu-

geordneten Punkte für eine unendlich ferne Gerade erhalten. Bis jetzt galt die Voraussetzung betreffs eines reellen Berührungspunktes. Ich will jetzt dieselbe fallen lassen und im Anschluss an die letzte Überlegung folgendes untersuchen. Es seien mir mehrere einander parallele Gerade gegeben, aber noch in der speziellen Lage, dass sie mit der reellen Berührungssehne parallel sind. Dann verfahre ich nach der obigen Angabe (Fig. 5). Ich denke mir die parallelen Linien sich schneidend in dem in ihrer Richtung liegenden unendlich fernen Punkte und ziehe von diesem die beiden möglichen Tangenten an die Polarkurve, die dann mit den parallelen Linien, in Sonderheit auch mit der Berührungssehne, parallel sind. Verfahre ich mit der Zuordnung der Schnittpunkte mit der Polkurve nach der Regel, die früher angegeben ist und sich als richtig erwiesen hat, so wären die Punkte y, y_1, z, z_1 in der Weise zu wählen, wie die Figur es angibt, und die Verbindungslinien von y und z und von y_1 und z_1 wären die Geraden, auf denen die zugeordneten Punkte der parallelen Linien liegen müssten und die dem in ihrer Richtung liegenden unendlich fernen Punkte zugeordnet wären. Das sind aber nicht die richtigen Geraden, sondern es sind die Verbindungslinien von y und z_1 und von y_1 und z, wie aus folgender Überlegung sich ergibt. Ich habe früher bewiesen, dass der Geraden L der im allgemeinen ausserhalb der Pol- und Polarkurve liegende Punkt 1 zugeordnet ist. Da alle gegebenen Geraden zu der Berührungssehne parallel sein sollen, so muss auch der Punkt 1 auf den beiden Geraden liegen, auf welchen die zugeordneten Punkte aller dieser gegebenen parallelen Geraden liegen, d. h. er muss der Schnittpunkt dieser beiden Geraden sein. Die Geraden [y z] und [y_1 z_1] schneiden sich nun sicherlich im Innern der Polkurve, sie sollen sich aber, wie gezeigt ist, ausserhalb der Polkurve im Punkte 1 schneiden. Das ist aber nicht anders möglich, als dass [y z] und [y_1 z_1] nicht die richtigen gesuchten Geraden sind, dass also die Zuordnung y, y_1, z, z_1 falsch ist. Ich muss also die Punkte, deren Konstruktion sicher richtig

ist, in der einzig möglichen anderen Weise zuordnen, dass sich y und z_1, y_1 und z entsprechen. Dann sind $[z\,y_1]$ und $[z_1\,y]$ die beiden gesuchten Geraden, die dann auch durch den Punkt l gehen müssen. Wie ist jedoch dieses Ergebnis mit den früheren vereinbar? Ich hatte die frühere Regel aufgestellt aus der Erzeugungsweise der Polarkurve als Kurve 2. Klasse, dass nämlich eine Tangente stetig an ihr entlang gleitet. Das gilt natürlich immer. Da ich hier jedoch zu einem widersprechenden Resultat gekommen bin, so ist dies nicht anders möglich als dass die Tangente beim Durchgang durch den Berührungspunkt ihren Richtungssinn umkehrt, und wirklich ist sofort ersichtlich, dass, wenn die Tangente im Berührungspunkte ihren Sinn umkehrt, ich tatsächlich die Zuordnung der entsprechenden Punkte erhalte, die für das zuletzt abgeleitete Resultat notwendig ist. Für diese Tangente der Polarkurve im Berührungspunkte, in dem also jede an der Polarkurve entlang gleitende Tangente ihren Sinn umkehrt, will ich den Namen singuläre Tangente verwenden. Dasselbe gilt natürlich auch von dem anderen Berührungspunkt.

Satz 26. „Haben Pol- und Polarkurve eine reelle doppelte Berührung, so sind die in den Berührungspunkten an die Polarkurve gezogenen Tangenten singuläre Tangenten, d. h. solche, die, wenn man sie sich an der Polarkurve entlang gleitend denkt, in den reellen Berührungspunkten ihren Richtungssinn umkehren.“

Mit Hülfe dieses Satzes kann man leicht noch eine Frage beantworten. Es sei mir eine Anzahl von Punkten der Polkurve gegeben x_1, x_2, x_3, die jedoch nicht durch einen reellen Berührungspunkt von einander getrennt sind. Die diesen Punkten vorwärts zugeordneten Tangenten der Polarkurve seien U_1, U_2, U_3. Es sei nun ein anderer Punkt x_4 der Polkurve so gegeben, dass er durch einen reellen Berührungspunkt von den anderen Punkten getrennt ist. Welche Richtung hat dann die dem Punkte x_4 vorwärts zugeordnete Tangente U_4? Die Tangenten U_1, U_2, U_3 sind alle nach dem Berührungspunkt l_1 hingerichtet. Lasse ich eine dieser

Tangenten, z. B. U_1 stetig an der Polarkurve entlang gleiten, so würde sie, wenn sie den Punkt x_4 trifft, nach dem Berührungspunkt l_2 hingerichtet sein. Nun muss ich aber beim Durchgang durch den Berührungspunkt ihren Sinn umkehren, dann wird sie, wenn sie x_4 trifft, ebenfalls nach l_1 hingerichtet sein, woraus zu erkennen ist, dass auch die dem Punkte x_4 vorwärts zugeordnete Tangente U_4 nach dem Berührungspunkt l_1 hingerichtet ist. Die rückwärts zugeordneten Tangenten würden in diesem Falle alle nach l_2 hingerichtet sein. Ich kann daraus den wichtigen Schluss ziehen, dass, wenn für einen Punkt der Polkurve die diesem Punkte durch die Reciprocität vorwärts oder rückwärts zugeordnete Tangente der Polarkurve ihrer Richtung nach festgelegt ist, auch für jeden anderen Punkt der Polkurve die bezüglich vorwärts oder rückwärts zugeordnete Tangente der Polarkurve bestimmt ist, ich brauche ja nur die erste Tangente an der Polarkurve entlang gleiten zu lassen und beim Durchgang durch einen reellen Berührungspunkt ihren Sinn umzukehren, d. h. also für den ersten Punkt kann ich beliebig wählen, welche Tangente ich ihm vorwärts oder rückwärts entsprechen lassen will, dann aber habe ich für keinen weiteren Punkt der Polkurve mehr freie Wahl, sondern die Richtungen der zugeordneten Tangenten sind fest bestimmt.

Satz 27. „Haben die beiden Ordnungskurven eine reelle doppelte Berührung und bestimmt man für einen Punkt der Polkurve die vorwärts zugeordnete Tangente der Polarkurve, so haben die allen anderen Punkten der Polkurve zugeordneten Tangenten der Polarkurve die Richtung nach demselben reellen Berührungspunkt hin, bezüglich von dem anderen weg, wie die erste Tangente. Entsprechendes gilt für die rückwärts zugeordneten Tangenten."

Werden die beiden Berührungspunkte imaginaer, so hat die Polarkurve keinen ausgezeichneten Punkt, in dem die erzeugende Tangente ihren Sinn umkehren sollte. In diesem Fall gibt es dann keine singuläre Tangente.

„Hat man 2 sich doppelt berührende Kegelschnitte und zieht 2 beliebige Tangenten an den einen, welche den anderen in Punktepaaren x, ξ, x_1, ξ_1 treffen, so liegt von den 3 Schnittpunkten $[x\,x_1, \xi\,\xi_1]$, $[x\,\xi_1, x_1\,\xi]$, $[x\,\xi, x_1\,\xi_1]$ der eine auf der gemeinschaftlichen Berührungssehne und die beiden anderen auf der Polare des ersteren, welche durch den gemeinschaftlichen Pol der Berührungssehne geht.“ Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich auch für den vorliegenden Fall die gleichen Schlüsse ziehen. Es schneiden sich nämlich in Fig. 1 die Geraden $[y\,z_1]$ und $[y_1\,z]$ auf der Berührungssehne L. In Fig. 2 ferner geht die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte $[V\,W_1]$ und $[V_1\,W]$ durch den ausserhalb liegenden Doppelpunkt l. Man kann diese beiden Ergebnisse sogar auf eine der beiden Figuren vereinigen, z. B. auf Fig. 1, indem ich erst x als gegeben betrachte und die Konstruktion der Fig. 1 durchführe, dann aber $[y\,z_1]$ als gegebene Gerade U betrachte und die Konstruktion der Fig. 2 anwende. Dann muss auch die Verbindungslinie von x und $[U\,U_1]$ durch l gehen. In gleicher Weise könnte man beides auf Fig. 2 beziehen.

Es lassen sich nun noch einige Angaben machen über die Gestalt von Pol- und Polarkurve, zu welchem Zwecke ich noch die Mittelpunkte der beiden in eine Ebene vereinigten reciproken Systeme einführen muss. Man bezeichnet bekanntlich als Mittelpunkt des ersten Systems den Punkt desselben, der der unendlich entfernten Geraden des zweiten zugeordnet ist. Entsprechend wird der Mittelpunkt des 2. Systems definiert. Dann werden sich auch alle die Geraden, die den einzelnen Punkten der unendlich fernen Geraden zugeordnet sind, im Mittelpunkte des 1. resp. 2. Systems schneiden. Liegt nun die Polkurve im 1., die Polarkurve im 2. System und liegt dann der Mittelpunkt dieses 2. Systems so, dass er von der Polarkurve umschlossen wird, also auf ihrer konkaven Seite, so kann ich durch diesen Punkt keine reelle Tangente an die Polarkurve ziehen, und die Polkurve muss infolgedessen eine Ellipse oder ein Kreis

sein. Wäre nämlich die Polkurve keine Ellipse oder Kreis, sondern eine Parabel oder Hyperbel, so hätte sie doch mindestens einen unendlich fernen Punkt, dem dann nach der Definition von Pol- und Polarkurve durch die Reciprocität eine Tangente der Polarkurve zugeordnet wäre, die durch den Mittelpunkt des 2. Systems und durch den unendlich fernen Punkt gehen müsste. In diesem Fall ist aber, wie ich gezeigt habe, eine solche Tangente durch den Mittelpunkt nicht vorhanden. Liegt der Mittelpunkt des 2. Systems auf der Polarkurve selbst, so kann ich durch ihn eine und nur eine Tangente an die Polarkurve ziehen. Also besitzt in diesem Falle die Polkurve sicher einen unendlich fernen Punkt, dem durch die Reciprocität diese Tangente der Polarkurve zugeordnet ist, die auch durch den unendlich fernen Punkt gehen muss. Die Polkurve muss in diesem Falle also eine Parabel sein. Liegt der Mittelpunkt des 2. Systems ausserhalb der Polarkurve und zwar auf ihrer konvexen Seite, so lassen sich von ihm 2 Tangenten an die Polarkurve legen, da ich es mit einer Kurve 2. Klasse zu tun habe, und von einem Punkt ausserhalb derselben sich immer 2 reelle Tangenten an dieselbe legen lassen. Die Polkurve muss in diesem Falle also 2 unendlich entfernte Punkte besitzen, denen durch die Reciprocität diese beiden Tangenten zugeordnet sind, die auch durch die unendlich entfernten Punkte gehen müssen. Die Polkurve ist in diesem Falle also eine Hyperbel.

Schluss.

Bezeichne ich den Schnittpunkt der beiden einem Punkte durch die Reciprocität zugeordneten Geraden als „doppelt konjugierten Punkt“ und entsprechend „doppelt konjugierte Gerade“, so kommt man durch Untersuchung dieser Elemente noch zu wichtigen Resultaten, deren Ableitung hier jedoch nicht gegeben werden soll. In Sonderheit ergibt sich:

Satz 28. „Jeder beliebige Punkt x der Ebene der Polkurve liegt mit seinem doppelt konjugierten Punkte und dem festen Punkte l in einer Geraden, und durch den zu x doppelt konjugierten Punkt gehen die beiden ihm durch die Reciprocitäten r und $\frac{a}{R}$ zugeordneten Geraden, ferner seine Polare in Bezug auf die Polkurve und seine Verbindungslinie mit dem festen Punkte l. Der Punkt x ist von seinem doppelt konjugierten Punkte durch die Polkurve harmonisch getrennt wie auch die Polare des Punktes x von seiner Verbindungslinie mit dem festen Punkte l.“

Aus diesem Satze ergibt sich eine einfache Konstruktion des Punktes l. Ich nehme 2 beliebige Punkte x_1 und x_2 in der Ebene der Pol- und Polarkurve an und konstruiere in Bezug auf Pol- und Polarkurve ihre doppelt konjugierten Punkte $[U_1 U_2]$ und $[V_1 V_2]$. Da nun x_1, $[U_1 U_2]$, l, andererseits x_2, $[V_1 V_2]$, l je auf einer Geraden liegen müssen, so ist l offenbar der Schnittpunkt der Verbindungslinien von x_1 und x_2 mit ihren zugehörigen doppelt konjugierten Punkten. Dualistisch ergibt sich:

Satz 29. „Jede beliebige Gerade U der Ebene der Polarkurve schneidet ihre doppelt konjugierte Gerade auf der festen Geraden L, und auf der zu U doppelt konjugierten Geraden liegen die beiden ihr durch die Reciprocitäten R und $\frac{a}{r}$ zugeordneten Punkte, ferner ihr Pol in Bezug auf die Polarkurve und ihr Schnittpunkt mit der festen Geraden L. Die Gerade L ist von ihrer doppelt konjugierten Geraden durch die Polarkurve harmonisch getrennt wie auch der Pol der Geraden U von ihrem Schnittpunkte mit der festen Geraden L.“

Aus diesem Satze ergibt sich eine einfache Konstruktion der festen Geraden L. Ich nehme 2 beliebige Gerade U_1 und U_2 in der Ebene der Pol- und Polarkurve an und konstruiere in Bezug auf Pol- und Polarkurve ihre doppelt konjugierten Geraden $[x_1 x_2]$ und $[y_1 y_2]$. Nun schneiden sich

U_1, $[x_1\, x_2]$, L einerseits und U_2 $[y_1\, y_2]$, L andererseits je in einem Punkte, also ist L offenbar die Verbindungslinie der Schnittpunkte von U_1 und U_2 mit ihren zugehörigen doppelt konjugierten Geraden.

Wenn ich dann noch alle Ergebnisse bezüglich l und L zusammenfasse, so erhalte ich mit Rücksicht auf die früheren Aufgaben 1 und 2 die alle Resultate zusammenstellende Fig. 6. In dieser Figur sind die Bezeichnungen dieselben, wie ich sie in Fig. 1 und 2 und bei den letzten Untersuchungen verwendet habe; l_1, L_1, l_2, L_2 sind die beiden anderen Paare von Doppelelementen.

Untersuchungen über besondere Lagen des Fundamentaldreiecks und über Ausartungen der Ordnungskurven werden an anderer Stelle unternommen werden.

Lebenslauf.

Ich, Hans Hoff, bin am 16. Januar 1882 zu Hannover geboren als Sohn des königlichen Eisenbahn-Betriebs-Sekretärs Hermann Hoff. Erzogen bin ich im evangelischen Glauben. Von Ostern 1891 ab besuchte ich das Pädagogium zum Kloster U. L. F. in Magdeburg und erhielt daselbst das Reifezeugnis Ostern 1901. Dann widmete ich mich 7 Semester lang in Halle den mathematischen und naturwissenschaftlichen Studien. Am 11. Februar 1905 bestand ich die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen; seit Ostern bin ich Mitglied des königl. pädagogischen Seminars zu Magdeburg und zugleich mit der Verwaltung einer Hülfslehrerstelle an der Guerickeschule daselbst betraut.

Ich hörte die Vorlesungen der Herren Dozenten: Bernstein, Brandes, Cantor, Conrad, Dorn, Eberhard, Fries, Grassmann, Grenacher, Kirchhoff, Klebs, Liepmann, Loening, Mehnert, Mez, Neumann, Reischle, Riehl, Robert, Schmidt, Schultze, Schwarz, Scupin, Stammler, Taschenberg, Uphues, Vaihinger, Wangerin.

Ich nahm teil an den Seminarübungen der Herren Professoren Cantor, Wangerin und an den praktischen Übungen der Herren Brandes, Dorn, Mez.

Allen meinen verehrten Herren Lehrern, in Sonderheit aber den Herren Professoren Wangerin und Grassmann, die meinen Arbeiten stets ihre fördernde Hülfe mit Rat und Tat angedeihen liessen, sage ich auch an dieser Stelle meinen wärmsten und ergebensten Dank.

Fig. 1.

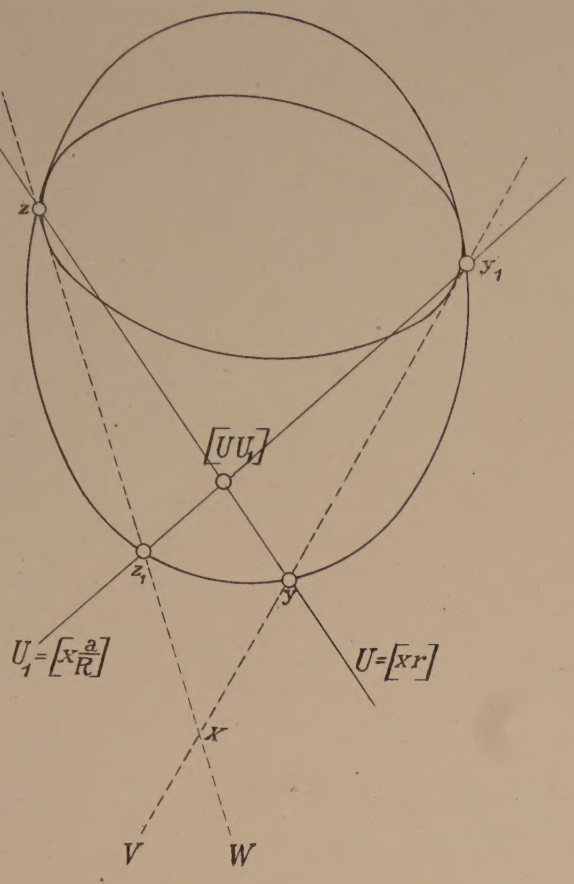


Fig. 2.

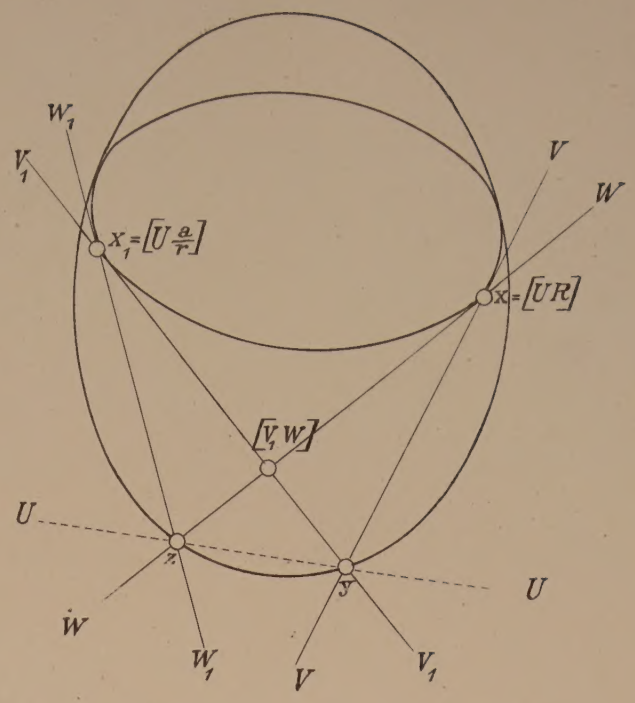


Fig. 4.

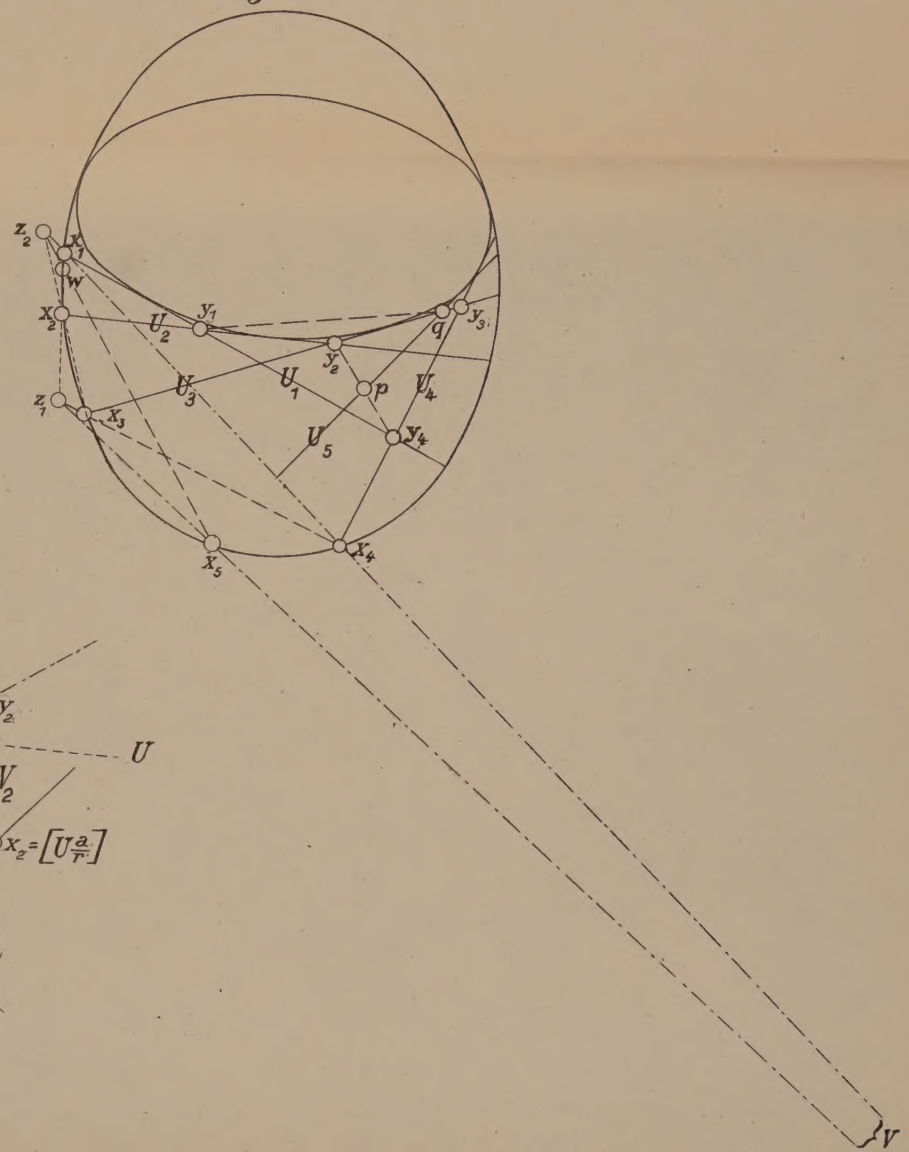
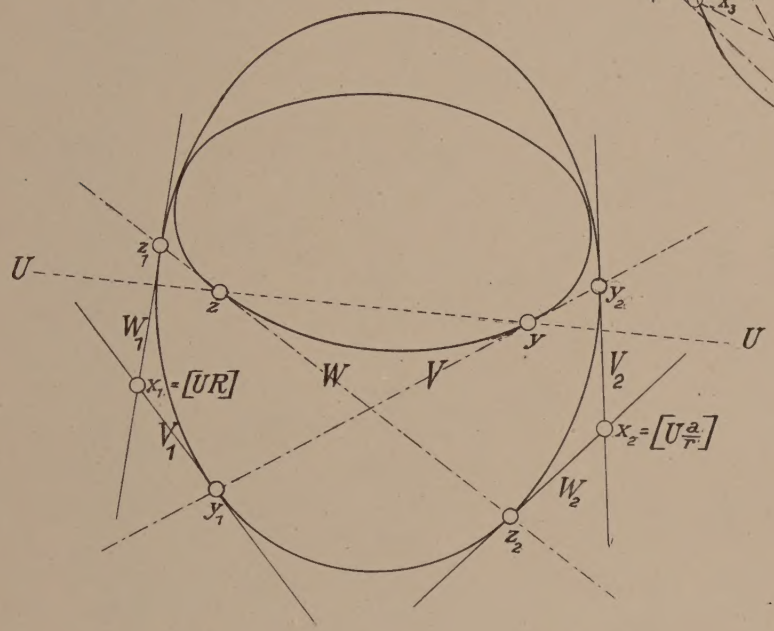


Fig. 3.



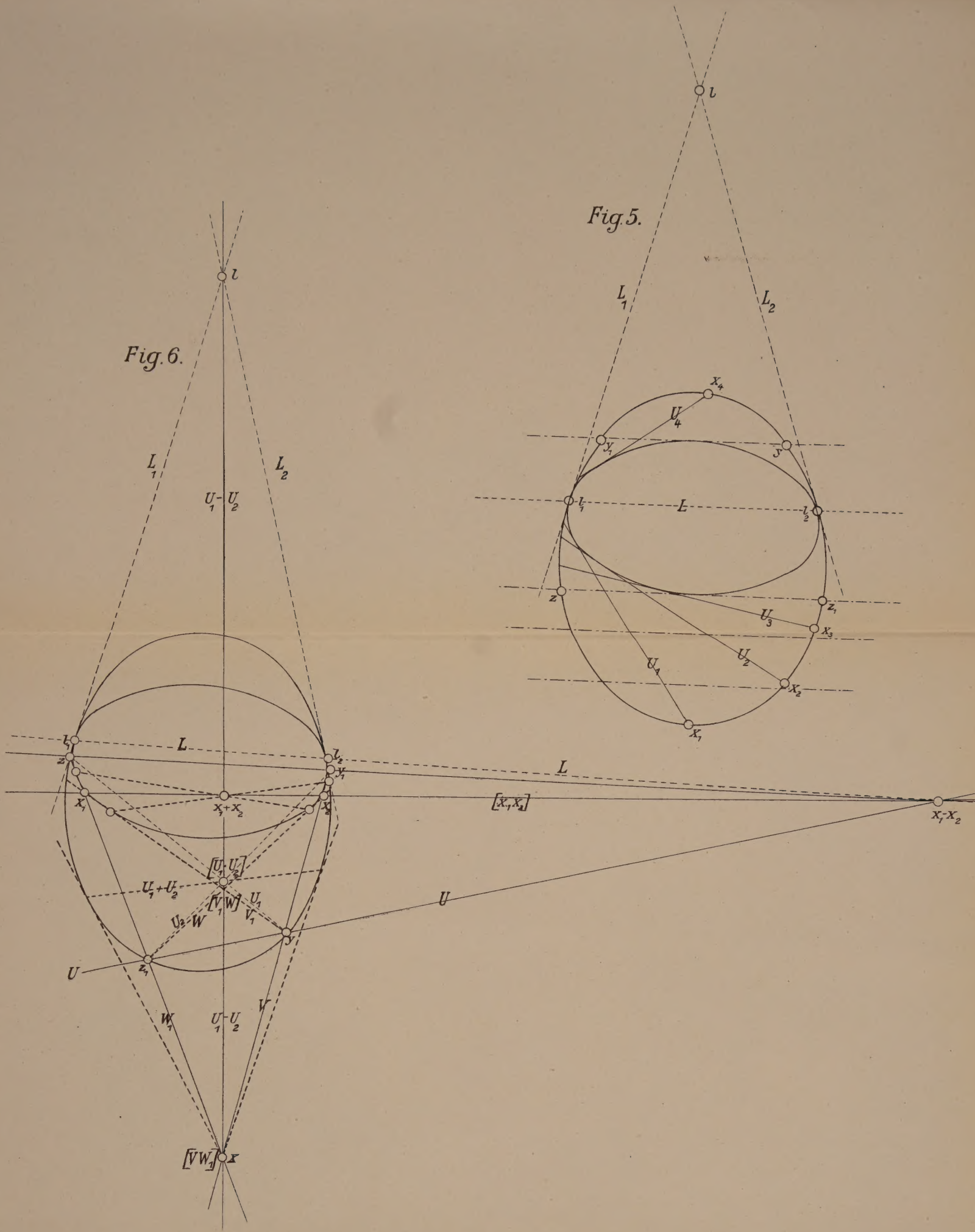


Fig. 5.
l
L1
L2
X4
U4
Y1
Y
l1
L
l2
z
z1
U3
X3
U2
U1
X2
X1
Fig. 6.
l
L1
L2
U1 - U2
L
l1
l2
z
y1
y
x1
x1+x2
x2
[U1 U2]
U1+U2
[V W]
U1
V1
U2 - W
W
V
U
z1
W1
U1 - U2
V
[V W]
x
[x1 x2]
x1 - x2